Chapitre VIII : Fonctions affines

1 Généralités

Définition 1.1 On appelle *fonction affine* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ où m et p sont deux constantes réelles
Si, de plus, $p = 0$, on dit que la fonction f est linéaire.

■ **Exemple 1.1** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 2x + \sqrt{5}$ est une fonction affine.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -\frac{2}{3}x$ est une fonction linéaire. ■

Définition 1.2 Avec les notations précédentes
- m est appelé *coefficient directeur* ou *pente* de la fonction affine
- p est *l'ordonnée à l'origine* de la fonction.

Propriété 1.1 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
f est une fonction affine si et seulement si pour tous réels a et b distincts, le rapport $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ est constant.

Démonstration 1.1
- Supposons que f est une fonction affine. Alors il existe deux réels m et p tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$. Ainsi, pour tous réels distincts a et b :

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{ma+p-(mb+p)}{a-b} = \frac{m(a-b)}{a-b} = m$$

- Réciproquement, soit b un réel.
  Il existe un réel c tel que, pour tout réel x différent de b, on a $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} = c$.
  Ainsi, pour tout réel x différent de b, $f(x) - f(b) = c(x-b)$, c'est-à-dire $f(x) = cx - cb + f(b)$.
  Cette égalité est également vraie pour $x = b$.
  En posant alors $m = c$ et $p = cb + f(b)$, on pour tout réel x, $f(x) = mx + p$, f est affine.

□

■ **Exemple 1.2** Soit g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 1$.
- $\dfrac{g(1)-g(0)}{1-0} = \dfrac{2-1}{1-0} = 1$
- $\dfrac{g(2)-g(1)}{2-1} = \dfrac{5-2}{2-1} = 3$

Ces deux rapports sont différents, la fonction g n'est donc pas une fonction affine. ■

Propriété 1.2 Soit f une fonction affine définie pour tout x réel par $f(x) = mx + p$. Soit x_1 et x_2 deux réels distincts. Alors $m = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ et $p = f(x_1) - mx_1$

■ **Exemple 1.3** Soit f la fonction affine telle que $f(2) = 5$ et $f(7) = 25$. On souhaite déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction du réel x.
On sait que $f(x)$ est de la forme $mx + p$, avec
- $m = \dfrac{f(2)-f(7)}{2-7} = \dfrac{5-25}{2-7} = \dfrac{-20}{-5} = 4$

- $p = f(2) - 4 \times 2 = 5 - 8 = -3$

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = 4x - 3$ ■

2 Représentation graphique

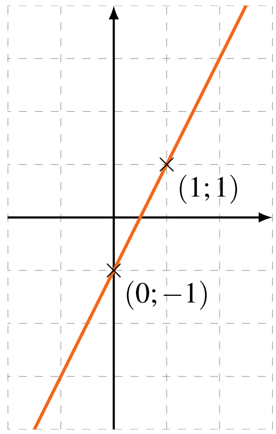
Propriété 2.1 Une fonction est affine si et seulement si sa courbe représentative dans tout repère est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

R Cette remarque sera prouvée dans un prochain chapitre... Suspense !

■ **Exemple 2.1** On souhaite représenter la fonction $f : x \mapsto 2x - 1$ dans un repère.

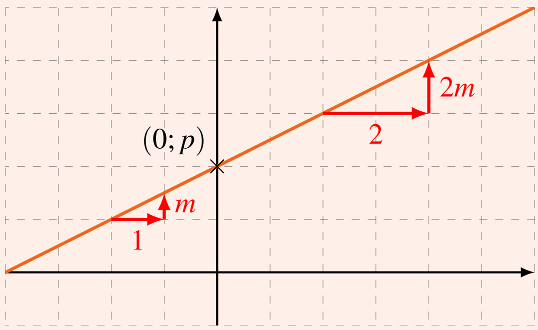
Puisque cette fonction est affine, sa courbe représentative dans n'importe quel repère est une droite. Il suffit de deux points pour la représenter.

- $f(0) = 2 \times 0 - 1 = -1$.
  La droite passe par le point de coordonnées $(0; -1)$
- $f(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$.
  La droite passer par le point de coordonnées $(1; 1)$



■

Propriété 2.2 — Interprétation graphique des coefficients. :



■ **Exemple 2.2** La droite ci-dessous est la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$ ■

3 Signe et variations

Propriété 3.1 Soit f une fonction affine définie pour tout x réel par $f(x) = mx + p$. Si $m \neq 0$, alors f s'annule en $x = -\frac{p}{m}$.

Démonstration 3.1 Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow mx + p = 0 \Leftrightarrow mx = -p \Leftrightarrow x = -\frac{p}{m}$ □

Propriété 3.2 — Variations d'une fonction affine. Soit f une fonction affine définie pour tout x réel par $f(x) = mx + p$
- Si $m < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- Si $m = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$
- Si $m > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Démonstration 3.2 Soient a et b deux réels tels que $a > b$.
$f(a) - f(b) = ma + p - (mb + p) = ma - mb = m(a - b)$. Or, puisque $a > b$, alors $a - b > 0$. $f(a) - f(b)$ est donc du signe de m.
- Si $m < 0$, alors $f(a) - f(b) < 0$ donc $f(a) < f(b)$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- Si $m = 0$, alors $f(a) - f(b) = 0$ donc $f(a) = f(b)$ donc f est constante sur $\mathbb{R}$
- Si $m > 0$, alors $f(a) - f(b) > 0$ donc $f(a) > f(b)$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

□

Conséquence : Si $m \neq 0$, le tableau de signe de la fonction $f : x \mapsto mx + p$ est

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$mx + p$		Signe de $-m$	0	Signe de m	

R Tout ceci vous rappelle le chapitre 4 sur le calcul algébrique ? C'est tout à fait normal, voyons.