Chapitre IX : Droites du plan

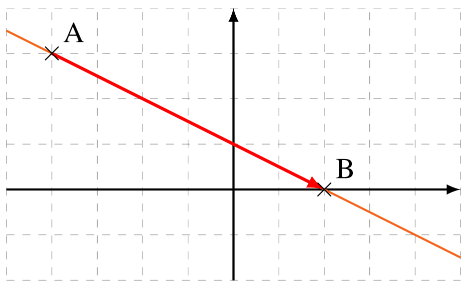
R Dans tout le chapitre, on se placera dans un repère orthonormé.

1 Vecteur directeur

Définition 1 — Vecteur directeur. : Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan et $\vec{v}$ un vecteur.
On dit que $\vec{v}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ s'il existe deux points distincts A et B de $\mathcal{D}$ tels que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Autrement dit, $\vec{v}$ a la même direction que $\mathcal{D}$.

■ **Exemple 1 :** Soit $A(-4;3)$ et $B(2;0)$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB). Il a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-4)\\0-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$ est également un vecteur directeur de la droite (AB).



■

Propriété 1 : Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\vec{v}$ un vecteur directeur. Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

■ **Exemple 2 :** Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) ■

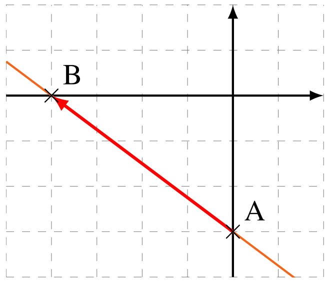
2 Equation cartésienne

Définition 2 : Une équation de droite $\mathcal{D}$ est une équation vérifiée par tous les points de $\mathcal{D}$ et uniquement ceux-ci.

Propriété 2 : Soient trois réels a, b et c. L'ensemble des points de coordonnées (x,y) qui vérifient $ax+by+c=0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.
On dit que $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de droite.

■ **Exemple 3 :** On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x + 4y + 12 = 0$.

- Soit on trouve deux points pour tracer la droite.
  - Si $x = 0$, on a alors $3 \times 0 + 4y + 12 = 0$, d'où $y = -3$.
    Le droite passe donc par le point $A\,(0; -3)$
  - Si $y = 0$, on a alors $3 \times x + 4 \times 0 + 12 = 0$, d'où $x = -4$.
    Le droite passe donc par le point $B\,(-4; 0)$
- Soit on cherche un point et un vecteur directeur.
  - La droite passe par le point $A\,(0; -3)$
  - Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$



De plus, le point $C(8; -9)$ appartient bien à la droite $\mathcal{D}$. En effet, les coordonnées de C vérifient l'équation de $\mathcal{D}$.
$3 \times 8 + 4 \times (-9) + 12 = 0$ ■

Propriété 3 : Soit $A(x_A; y_A)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.
Il existe alors un réel c tel que l'équation $ax + by + c = 0$ soit une équation de la droite passant par A, de vecteur directeur $\vec{u}$.

Démonstration 2.1 : Soit $M(x; y)$ un point du plan. M appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si les vecteur $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire, si et seulement si leur déterminant est nul.
Or, les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $\begin{pmatrix}x - x_A\\y - y_A\end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) &= \begin{vmatrix}x - x_A & -b\\ y - y_A & a\end{vmatrix}\\
&= a(x - x_A) + b(y - y_A)\\
&= ax + by + (-ax_A - by_A)
\end{aligned}$$

En posant $c = -ax_A - by_A$, on a bien $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $ax + by + c = 0$ □

Définition 3 : Cette équation est appelée équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$

■ **Exemple 4 :** Soit $A(2; 5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. Soit $M(x; y)$. M appartient à la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) &= \begin{vmatrix}x - 2 & 3\\ y - 5 & 4\end{vmatrix}\\
&= 4(x - 2) - 3(y - 5)\\
&= 4x - 3y - 8 + 15\\
&= 4x - 3y + 7
\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donc $4x - 3y + 7 = 0$. ■

R Lorsque $a = 0$, la droite est horizontale. Lorsque $b = 0$, la droite est verticale.

3 Equation réduite

3.1 Caractérisation des droites du plan

Propriété 4 — Equation réduite. : Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan.

- Si $\mathcal{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées, alors elle admet une équation de la forme $x = k$, où k est un réel.
- Sinon, il existe deux réels m et p tels que $\mathcal{D}$ ait pour équation $y = mx + p$.

On les appelle "équations réduites de $\mathcal{D}$".

Démonstration 3.1 : On considère une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$: $ax + by + c = 0$

- Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et l'équation se réécrit $ax = -c$ ou $x = \frac{-c}{a}$
- Sinon, l'équation se réécrit $by = -ax - c$, soit $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

□

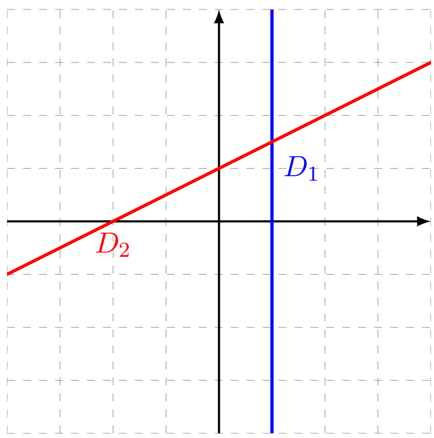
R Dans ce second cas, m est appelé coefficient directeur de $\mathcal{D}$. p est l'ordonnée à l'origine.

Propriété 5 : Réciproquement, si m, p et k sont trois réels, l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $y = mx + p$ ou $x = c$ est une droite.

R On démontre ainsi que la courbe représentative d'une fonction affine est bien une droite.

■ **Exemple 5 :** Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on souhaite tracer les droites D_1 d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ et D_2 d'équation $x = 1$.

- D_2 a une équation de la forme $x = c$. C'est donc une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
- Pour tracer D_1. On prend deux valeurs de x différentes, par exemple 0 et 2.
  - Pour $x = 0$, $y = \frac{1}{2} \times 0 + 1 = 1$. On place donc le point de coordonnées (0;1).
  - Pour $x = 2$, $y = \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2$. On place donc le point de coordonnées (2;2).
  - On trace ensuite la droite qui passe par ces deux points.



■

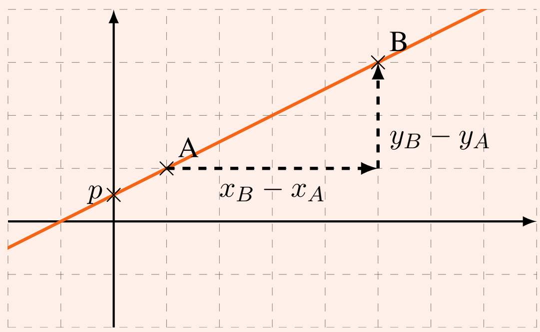
Propriété 6 : Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $y = mx + p$. Le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Démonstration 3.2 : Nous allons considérer deux points de cette droite.
Prenons $x = 0$; on a alors $y = p$. Le point $A(0; p)$ appartient donc à la droite $\mathcal{D}$.
Prenons $x = 1$; on a alors $y = m + p$. Le point $B(1; m + p)$ appartient donc à la droite $\mathcal{D}$.
Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-0\\m+p-p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$. □

3.2 Calcul des coefficients

Propriété 7 : On considère deux points distincts $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et B.

- Si $x_A = x_B$, alors $\mathcal{D}$ a pour équation $x = x_A$.
- Sinon, le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ vaut $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- Dans ce cas, la valeur de p se lit sur l'axe des ordonnées.



■ **Exemple 6 :** Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points A(0;1) et B(0;5).

Puisque A et B ont mêmes abscisse, la droite (AB) a pour équation $x = 0$. ■

■ **Exemple 7 :** Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points $E(4\sqrt{29}; 47)$ et $F(\pi; 47)$.

Puisque E et F ont mêmes ordonnées, la droite (EF) a pour équation $y = 47$. ■

■ **Exemple 8 :** Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points C(3;2) et D(5;-4).

- C et D ont deux abscisses différentes, l'équation de la droite (CD) est donc de la forme $y = mx+p$.
- Cherchons m. On a $m = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{-4-2}{5-3} = \dfrac{-6}{2} = -3$. La droite (CD) a donc une équation réduite de la forme $y = -3x + p$.
- Cherchons p. Le point C appartient à la droite (CD). Ses coordonnées vérifient donc l'équation de cette droite : $y_c = -3x_C + p$, donc $-3 \times 3 + p = 2$, soit $p = 11$.
- On peut vérifier avec les coordonnées de D : $-3 \times 5 + 11 = -4$.
- L'équation de la droite (CD) est donc $y = -3x + 11$.

■

4 Intersection de droites

4.1 Droites parallèles

Propriété 8 : Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

■ **Exemple 9 :** Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $3x-5y+8=0$ et $\mathcal{D}'$ la droite d'équation $-6x+10y+24=0$.

- Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.
- Un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-10\\-6\end{pmatrix}$
- $\vec{v}=-2\vec{u}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.
- Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc parallèles.

■

Propriété 9 : Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y=mx+p$ et $\mathcal{D}'$ la droite d'équation $y=m'x+p'$. $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si $m=m'$

Démonstration 4.1 : La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ et la droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v'}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$. On a alors $det(\vec{v},\vec{v'})=m'-m$, donc les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont colinéaires si et seulement si $m=m'$. □

■ **Exemple 10 :** Les droites d'équation $y=3x+2$ et $y=3x-47$ sont parallèles. ■

4.2 Système d'équation

Propriété 10 : Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non parallèles. Alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un unique point d'intersection : c'est le point dont les coordonnées vérifient simultanément les deux équations de droite.

Définition 4 : Un système d'équations est un ensemble de plusieurs équations qu'il faut résoudre en même temps. On le note avec des accolades.

Résolution par substitution

Définition 5 — Résolution par substitution. : Pour résoudre un système d'équations, on peut procéder par substitution :

- On exprime une inconnue en fonction de l'autre dans une équation.
- On remplace l'inconnue ainsi exprimée dans la seconde équation.
- On résout l'équation ainsi obtenue.
- On remplace la deuxième inconnue par la solution trouvée dans la première équation.

■ **Exemple 11 :** On considère deux droites : la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x+2y-4=0$ et la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $x-2y+1=0$. On cherche $M(x;y)$ le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

$$\begin{cases} 3x+2y-4 &= 0 \\ x-2y+1 &= 0 \end{cases}$$ Les coordonnées de $M(x;y)$ vérifient les deux équations.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y-4 &= 0 \\ x &= 2y-1 \end{cases}$$ On isole x dans la 2ème expression. On l'exprime en fonction de y.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(2y-1)+2y-4 &= 0 \\ x &= 2y-1 \end{cases}$$ On substitue l'inconnue isolé dans la 1ère équation.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y-3+2y-4 &= 0 \\ x &= 2y-1 \end{cases}$$ On résout la première équation en y

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8y &= 7 \\ x &= 2y-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y &= \frac{7}{8} \\ x &= 2y-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y &= \frac{7}{8} \\ x &= 2\times\frac{7}{8}-1 \end{cases}$$ On remplace y par la valeur que l'on a trouvé

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y &= \frac{7}{8} \\ x &= \frac{3}{4} \end{cases}$$ On trouve finalement les valeurs de x et y.

Le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{7}{8}\right)$ ■

R La résolution par substitution est utile lorsque l'on peut obtenir facilement une inconnue en fonction de l'autre.

Résolution par combinaison

Définition 6 — Résolution par combinaison. : Une résolution par substitution peut faire apparaître des fractions, ce qui n'est pas toujours pratique.
Pour résoudre un système d'équations, on peut procéder par combinaison :

- On peut multiplier une équation par n'importe quel entier non nul, elle restera vraie.
- On peut remplacer une équation par la somme de deux équations : on fera la somme des membres de gauche et la somme des membres de droite.
- Le but est d'utiliser ces deux procédés pour éliminer peu à peu les inconnues, jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'une.
- On "remonte" alors dans les équations en remplaçant l'inconnue par la solution trouvée.

Cette méthode est également connue sous le nom de "Pivot de Gauss".

■ **Exemple 12 :** On souhaite résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x-2y-5 &= 0 \\ 5x+3y-2 &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \times 5 \\ \times 3 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcl} 3x-2y-5 & = & 0 \\ 5x+3y-2 & = & 0 \end{array} \right.$$

On multiplie la première équation par 5 et la deuxième par 3

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 15x-10y-25 & = & 0 \\ 15x+9y-6 & = & 0 \end{array} \right.$$

On a ainsi fait apparaître une partie en commun.

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 15x-10y-25-(15x+9y-6) & = & 0 \\ 15x+9y-6 & = & 0 \end{array} \right.$$

On garde la deuxième équation. Dans la première, on soustrait la deuxième.

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -19y-19 & = & 0 \\ 15x+9y-6 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -1 \\ 15x+9y-6 & = & 0 \end{array} \right.$$

On résout la première équation

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -1 \\ 15x+9\times(-1)-6 & = & 0 \end{array} \right.$$

On remplace y par la valeur trouvée dans la deuxième équation puis on résout.

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -1 \\ x & = & 1 \end{array} \right.$$

On remplace y par la valeur trouvée dans la deuxième équation puis on résout.

S={(1;-1)}
Les droites $\mathcal{D}$ d'équation $3x-2y-5=0$ et $\mathcal{D}'$ d'équation $5x+3y-2=0$ se coupent au point d'intersection $A(1;-1)$ ■