Chapitre X : Probabilités

1 Univers d'une expérience aléatoire

Définition 1 :
- Une *expérience aléatoire* est une expérience dont on ne peut prévoir le résultat à coup sûr.
- Les résultats possibles de cette expérience s'appellent les *issues*.
- L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire s'appelle l'*univers*. On le note en général Ω

■ **Exemple 1 :** On choisit un nombre entier au hasard entre 1 et 6 inclus, par exemple en lançant un dé classique.
- Les issues sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
- L'univers est $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

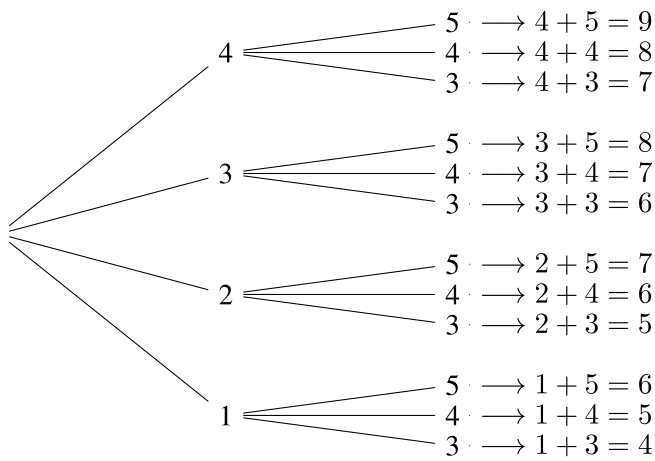
■

■ **Exemple 2 :** On choisit un nombre entier au hasard entre 1 et 4 inclus puis un nombre au hasard entre 3 et 5 inclus. On fait ensuite la somme des deux nombres obtenus.

On peut énumérer toutes les possibilités dans un tableau

Nombre 2 / Nombre 1	3	4	5
1			
2			
3			
4			

On peut énumérer toutes les possibilités grâce à un arbre.



L'univers de cette expérience aléatoire est donc $\{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. ■

2 Loi de probabilité

Définition 2 : Définir une loi de probabilité sur un univers $\Omega = \{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, c'est associer à tout nombre x_i un réel p_i positif tel que $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$. Le nombre p_i est la probabilité de l'issue x_i.

■ **Exemple 3 :** Dans une urne sont placées 3 boules jaunes, 5 boules rouges et 2 boules bleues, toutes indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard et on regarde sa couleur. Cette expérience aléatoire peut-être modélisée par la loi de probabilité suivante

Issue	Jaune	Rouge	Bleue
Probabilité	3/10	1/2	1/5

■

■ **Exemple 4 :** On choisit un nombre entier au hasard entre 3 et 7.
On peut définir une loi de probabilité sur l'univers $\Omega = \{3;4;5;6;7\}$ en poser $p_3 = \frac{1}{10}$, $p_4 = \frac{1}{5}$, $p_5 = \dfrac{3}{10}$, $p_6 = \dfrac{1}{10}$ et $p_7 = \dfrac{3}{10}$

- Pour chaque issue, on a bien associé un réel positif.
- La somme de ces réels vaut $\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{10} = 1$
- On a donc bien défini une loi de probabilité sur Ω.

■

R On pourrait, à l'aide de cette loi, modéliser l'expérience suivante : Dans une urne se trouvent 10 boules numérotées, indiscernables au toucher. 1 porte le numéro 3, 2 portent le numéro 4, 3 portent le numéro 5, 1 porte le numéro 6 et 3 portent le numéro 7. On tire une boule au hasard et on regarde le numéro inscrit dessus.
Toutefois, il ne s'agit là que d'une modélisation : la loi de probabilité est un apriori sur la situation, pas une vérité mathématique.

Définition 3 : On dit d'une loi de probabilité qu'elle est équiprobable sur un univers Ω fini si chaque événement élémentaire possède la même probabilité.

Propriété 1 : Dans ce cas, pour chaque issue, sa probabilité vaut $\dfrac{1}{|\Omega|}$, où $|\Omega|$ désigne le cardinal de Ω, c'est-à-dire son nombre d'éléments.

■ **Exemple 5 :** Sur l'univers $\Omega = \{1;2;3;4\}$, on peut poser $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \dfrac{1}{4}$. ■

R Cela sert notamment à modéliser des situations équilibrées : par exemple, on jette à dé équilibré à 4 faces, numérotées de 1 à 4, et on regarde le nombre de la face du dessous.

3 Calcul de probabilités

3.1 Probabilité d'un événement

Définition 4 : Un *événement* d'une expérience aléatoire est un sous-ensemble de son univers. S'il n'est composé que d'un élément, on parle d'*événement élémentaire*.

■ **Exemple 6 :** Pour l'univers $\Omega = \{4;5;6;7;8;9\}$, l'événement A : "Obtenir un nombre pair" est composé des issues 4, 6 et 8. $A = \{4;6;8\}$. ■

Définition 5 : On considère une expérience aléatoire sur un univers Ω et A un événement. La probabilité de l'événement A est la somme des probabilités des issues qui composent A. On la note $\mathbb{P}(A)$.

■ **Exemple 7 :** On considère l'univers $\Omega = \{1;2;3;4\}$. On associe aux issues de cet univers les réels $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{6}$ et $p_4 = \frac{1}{2}$ ■

- On a bien une loi de probabilités : les réels associés sont positifs et $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$.
- L'événement B : "obtenir un nombre pair" est composé des issues 2 et 4.
- On a donc $\mathbb{P}(A) = p_2 + p_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

3.2 Équiprobabilité

Propriété 2 : En situation d'équiprobabilité sur un univers Ω fini, la probabilité d'une issue A vaut

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas total}}$$

■ **Exemple 8 :** On lance un dé équilibré à 8 faces, numérotées de 1 à 8 et on regarde le numéro du dessus. Cette expérience peut-être modélisée par l'univers $\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$ en situation d'équiprobabilité. ■

- La probabilité de chaque issue est $\frac{1}{8}$.
- L'événement A : "obtenir un nombre supérieur ou égal à 6" est composé des issues 6, 7 et 8, soit trois éléments
- On a donc $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$

3.3 Événement contraire

Définition 6 : On considère une expérience aléatoire sur un univers Ω et A un événement. On appelle *événement contraire* de A l'événement qui correspond à toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A. On le note $\overline{A}$.

■ **Exemple 9 :** Sur l'univers $\Omega = \{1;4;7;14;25\}$, le contraire de l'événement A : $\{1;25\}$ est $\overline{A}$: $\{4;7;14\}$ ■

■ **Exemple 10 :** On lancé un dé à 12 faces numérotées de 1 à 12. Le contraire de l'événement « Obtenir 9 ou plus » est « Obtenir 8 ou moins ». ■

Propriété 3 : Pour tout événement A, $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$. Il en vient que

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$$

■ **Exemple 11 :** On considère un dé à 8 faces numérotées de 1 à 8. Ce dé est truqué et les résultats que l'on peut obtenir sont modélisés par la loi de probabilité suivante :

Issue	1	2	3	4	5	6	7	8
Probabilité	1/10	1/5	1/20	1/20	1/5	1/10	1/5	3/20

■

On considère l'événement A : « Obtenir 7 ou moins ».

- L'événement A est composé des issues 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7. Sa probabilité vaut donc $\mathbb{P}(A) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7$...
- Passons par l'événement contraire $\overline{A}$.
  - Le contraire de l'événement A est « obtenir 8 ».
  - Sa probabilité est de $\dfrac{3}{20}$.
  - Or, $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$. Ainsi, $\mathbb{P}(A) = 1 - \dfrac{3}{20} = \dfrac{17}{20}$

3.4 Union et intersection d'événements

Définition 7 : Soient A et B deux événements.

- L'événement $A \cup B$ (A union B) est l'événement composé des issues qui réalisent **au moins** A ou B.
- L'événement $A \cap B$ (A inter B) est l'événement composé des issues qui réalisent **à la fois** A ou B.

■ **Exemple 12 :** Soit $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ un univers. On note A l'événement $\{1; 3; 7; 8\}$ et B l'événement $\{1; 5; 6; 7\}$

- $A \cup B = \{1; 3; 5; 6; 7; 8\}$
- $A \cap B = \{1; 7\}$

■

Propriété 4 : Pour tous événements A et B,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

■ **Exemple 13 :** Soit A et B deux événements d'un univers Ω tels que $\mathbb{P}(A) = 0.5$, $\mathbb{P}(B) = 0.6$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.9$. On sait que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

c'est-à-dire :

$$0.9 = 0.5 + 0.6 - \mathbb{P}(A \cap B) = 1.1 - \mathbb{P}(A \cap B)$$

On a donc

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1.1 - 0.9 = 0.2$$

■