Exercices : Probabilités

1 Univers d'une expérience aléatoire

► **Exercice 1**

Une urne contient 5 boules rouges numérotées de 1 à 5 et 3 boules bleues numérotées de 1 à 3.

1. On tire une boule et on regarde sa couleur. Quel est l'univers de cette expérience ?
2. On tire une boule et on regarde le nombre inscrit sur cette boule. Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?
3. On tire une boule et on regarde à la fois sa couleur et le nombre inscrit sur cette boule. Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?

► **Exercice 2**

On choisit au hasard deux nombres entre 1 et 4 puis on en fait la somme. A l'aide d'un arbre ou d'un tableau, déterminer l'univers de cette expérience aléatoire.

► **Exercice 3**

On lance trois fois une pièce de monnaie et on regarde sur quelle face celle-ci tombe. On note P s'il s'agit de Pile et F s'il s'agit de Face. PPF signifie que la pièce est tombée sur Pile, Pile et Face, dans cet ordre-là. Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?

► **Exercice 4**

On choisit au hasard deux nombres entre 0 et 4 puis on en les multiplie. A l'aide d'un arbre ou d'un tableau, déterminer l'univers de cet expérience aléatoire.

2 Loi de probabilités

► **Exercice 5**

Une urne contient 5 boules rouges numérotées de 1 à 5 et 3 boules bleues numérotées de 1 à 3.

1. On tire une boule et on regarde sa couleur. Résumer la loi de probabilité de cette expérience sous la forme d'un tableau
2. On tire une boule et on regarde le nombre inscrit sur cette boule. Résumer la loi de probabilité de cette expérience sous la forme d'un tableau

► **Exercice 6**

On lance une pièce non équilibrée et on regarde de quelle côté celle-ci tombe : Pile ou face.

1. Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?
2. On souhaite attribuer une loi de probabilité à cette expérience pour modéliser le fait que "la probabilité d'obtenir Face est deux fois plus grande que celle d'obtenir Pile". Quelle loi de probabilité peut-on définir ?

► **Exercice 7**
On considère l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. On souhaite construire une loi de probabilité sur cet univers avec $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$ et $p_4 = 0.04$. Que doit valoir p_5?

► **Exercice 8**
On considère l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$. On souhaite construire une loi de probabilité sur cet univers avec $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{3}$ et $p_4 = \frac{1}{12}$. Que doit valoir p_3?

► **Exercice 9**
On considère l'univers $\Omega = \{1; 2; 3\}$. Peut-on construire une loi de probabilité sur cet univers avec $p_1 = \frac{2}{3}$ et $p_2 = \frac{3}{5}$?

3 Calcul de probabilités

3.1 Probabilité d'un événement

► **Exercice 10**
On choisit au hasard un nombre entre 1 et 14. De quelles issues sont composés les événements suivants :

- A : "Le nombre obtenu est un multiple de 3"
- B : "Le nombre obtenu est premier"
- C : "Le nombre obtenu est strictement supérieur à 10"
- D : "Le nombre obtenu est un diviseur de 6"

► **Exercice 11**
On considère l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$. On définit sur cet univers une loi de probabilité en posant $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{5}$ et $p_4 = \frac{2}{5}$.

1. Vérifier que l'on a bien construit une loi de probabilité sur Ω.
2. On tire au hasard un nombre selon cette loi de probabilité. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   - Le nombre obtenu est impair
   - Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3
   - Le nombre obtenu est un multiple de 5.

► **Exercice 12**
On considère l'univers $\Omega = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. On définit sur cet univers une loi de probabilité telle que $p_{-2} = p_{-1} = p_0 = p_1 = p_2 = \frac{1}{8}$

1. Déterminer la valeur de p_3.
2. On tire un nombre au hasard selon cette loi de probabilité. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   - A : "Le nombre obtenu est strictement négatif"
   - B : "Le nombre obtenu est négatif ou nul"
   - C : "Le nombre obtenu est strictement positif"

► Exercice 13
On lance un dé truqué à six faces, numérotées de 1 à 6 et on regarde le numéro de la face du dessus.

1. Quel est l'univers Ω de cette expérience ?
2. On souhaite associer à cet univers une loi de probabilité qui modélise les faits suivants
   - Les faces 1, 2, 3, 4 et 5 ont toutes autant de chance d'être au-dessus
   - La face numéro 6 est obtenue 7 fois plus souvent que la face numéro 1.

   Quelle loi de probabilité peut-on associer à Ω ?
3. Sous cette loi de probabilité, déterminer la probabilité des événements suivants :
   - A : "Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 5"
   - B : "Le nombre obtenu est pair".
   - C : "Le nombre obtenu est différent de 6"

3.2 Équiprobabilité

► Exercice 14
On considère l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. On choisit un nombre au hasard, de manière équiprobable. Déterminer la probabilité des événements suivants :

- A : "Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 6"
- B : $\{2; 5; 7\}$
- C : "Le nombre obtenu est un multiple de 3"

► Exercice 15
Dans un collège de 500 élèves, 60% sont des filles. 80 % d'entre elles sont droitières. On sait également que 15% des garçons sont gauchers.

1. Compléter le tableau suivant avec les **effectifs**.

	Gauchers	Droitiers	Total
Garçons			
Filles			
Total			

2. On interroge au hasard un élève, de manière équiprobable
   (a) Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?
   (b) Quelle est la probabilité que cet(te) élève soit droitier(e) ?
   (c) Quelle est la probabilité que l'élève soit un garçon gaucher ?

► Exercice 16 — Le paradoxe de Simpson.
On dispose d'urnes dans lesquelles on place des boules rouges et des boules blanches. On souhaite savoir dans quelle urne il est préférable de piocher pour avoir le plus de chance de tirer une boule rouge.

1. Dans l'urne notée A1, on place 1 boule rouge et 2 boules blanches. Dans une urne notée A2, on place 5 boules rouges et 5 boules blanches. On tire alors une boule de manière équiprobable. Quelle urne vaut-il mieux choisir entre A1 et A2 ?
2. On place 8 boules rouges et 3 boules blanches dans une urne notée B1, ainsi que 6 boules rouges et deux boules blanches dans une urne notée B2. On tire alors une boule de

manière équiprobable. Quelle urne vaut-il mieux choisir entre B1 et B2 ?

3. On place dans l'urne C1 les boules qui sont dans les urnes A1 et B1. On place dans l'urne C2 les boules qui sont dans les urnes A2 et B2. On tire alors une boule de manière équiprobable. Quelle urne vaut-il mieux choisir entre C1 et C2 ?

3.3 Événement contraire, union et intersection

► Exercice 17

On tire au hasard, de manière équiprobable, une boule dans une urne contenant 3 boules noires, 2 boules rouges et 5 boules jaunes. On s'intéresse à la couleur de la boule tirée

1. Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?
2. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
3. Quelle est la probabilité de tirer une boule jaune ?
4. De deux manières différentes, déterminer la probabilité de tirer une boule bleue.

► Exercice 18

Dans une classe de 35 élèves, 8 élèves ont eu entre 0 et 5 à la dernière interrogation, 10 ont eu entre 6 et 10, 12 ont eu entre 11 et 15 et le reste a eu 16 ou plus. On choisit au hasard un élève de la classe.

1. Déterminer la probabilité que l'élève ait eu entre 6 et 10.
2. Déterminer la probabilité que l'élève ait eu entre 6 et 15.
3. De deux manières différentes, déterminer la probabilité que l'élève ait eu 16 ou plus.

► Exercice 19

On choisit un nombre au hasard entre 1 et 10 inclus.

1. Donner les issues qui réalisent les événements suivants.
   - A : "Le nombre obtenu est pair"
   - B : "Le nombre obtenu est un multiple de 3"
2. Décrire par une phrase l'événement $A \cap B$ puis donner les issues qui le réalisent.
3. Décrire par une phrase l'événement $A \cup B$ puis donner les issues qui le réalisent.
4. Décrire par une phrase l'événement $\overline{A}$ puis déterminer les événements qui le réalisent.

► Exercice 20

Soit Ω un univers et deux événements A et B tels que $P(A) = 0.32$, $P(B) = 0.77$ et $P(A \cup B) = 0.91$. Que valent $P(\bar{A})$ et $P(A \cap B)$?

► Exercice 21

Soit Ω un univers et deux événements A et B tels que $P(B) = 0.6$ et $P(A \cap B) = 0.15$ et $P(A \cup B) = 0.9$. Que vaut $P(A)$?

► Exercice 22

Soit Ω un univers et deux événements A et B tels que $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Que vaut $P(A \cup B)$?

▶ Exercice 23

Face à la pénurie de volontaires pour passer au tableau, le professeur va en désigner un au hasard, de manière équiprobable. On sait que la classe est composée de 35 élèves dont 19 filles. De plus, 6 filles et 8 garçons n'ont pas fait leur exercice.

1. Compléter le tableau suivant

	Garçons	Filles
Exo fait		
Exo non fait		

On appelle F l'événement "l'élève interrogé est une fille" et E l'événement "l'élève interrogé a fait on exercice".

2. Déterminer $P(F)$ et $P(E)$
3. Décrire par une phrase les événements $\bar{F}$, $\bar{E}$, $F \cap E$.
4. Déterminer la probabilité de ces événements.
5. A l'aide des résultats précédents, calculer $P(F \cup E)$

▶ Exercice 24

Un lycée comporte 440 élèves de 2de. Parmi ces élèves, 30% ont choisi de prendre la spécialité Physique en 1e. 55% des élèves de 2de ont choisi de prendre la spécialité Mathématiques. Parmi les élèves qui souhaitent suivre la spécialité Physique, les trois quarts prennent également la spécialité mathématiques.

1. Remplir le tableau d'effectifs suivant. Les calculs effectués seront précisés sur la copie.

	Mathématiques	Pas de maths	Total
Physique			
Pas de Physique			
Total			

2. On sélectionne un élève au hasard. On note M l'événement « l'élève a pris la spécialité mathématiques » et H l'événement « l'élève a pris la spécialité Physique »
   (a) D'après l'énoncé, que valent $\mathbb{P}(M)$ et $\mathbb{P}(H)$
   (b) Déterminer $\mathbb{P}(\overline{M})$ et $\mathbb{P}(M \cap H)$
   (c) Que signifie l'événement $\overline{M \cup H}$? Donner sa probabilité.