Exercices VIII : Fonctions affines

1 Fonctions affines

► Exercice 1
Parmi les fonctions suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R}$, lesquelles sont des fonctions affines ?

$f : x \mapsto 2x$ $\qquad g : x \mapsto 3x^2 - 1$ $\qquad h : x \mapsto 6 - 3x$

$i : x \mapsto \dfrac{\sqrt{7}}{2}x - 8\sqrt{3}$ $\qquad j : x \mapsto (2x-4)^2-(6-2x)^2$ $\qquad k : x \mapsto x^3 + x$

► Exercice 2
Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(0) = 3$, $f(2) = 5$ et $f(3) = 7$ peut-elle être affine ?

► Exercice 3
Vrai ou faux ? Une fonction g telle que $g(-1) = -2$, $g(2) = 10$ et $g(21) = 88$ est forcément affine.

► Exercice 4
Déterminer l'expression de la fonction linéaire f telle que $f(3) = 9$

► Exercice 5
Déterminer l'expression de la fonction affine g telle que $g(0) = 2$ et $g(1) = 5$

► Exercice 6
Même question pour la fonction affine h telle que $h(3) = 8$ et $h(7) = -4$

► Exercice 7
Soit a et b deux réels et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$. On sait que la droite qui représente cette fonction coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2 et l'axe des ordonnées en un point dont l'ordonnée se trouve dans l'intervalle $]-2; 1[$. Quelles sont les valeurs possibles de a et b ?

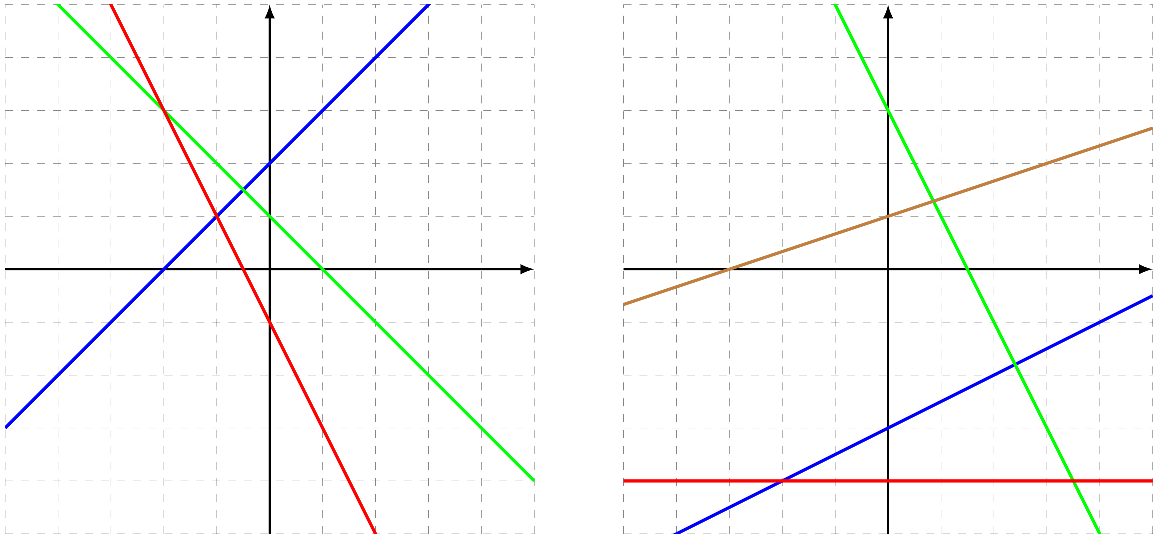
► Exercice 8
Dans un repère orthonormé, tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R}$

$f : x \mapsto 2x$ $\qquad g : x \mapsto 3$ $\qquad h : x \mapsto 3 - x$

$i : x \mapsto \dfrac{1}{2}x - 2$ $\qquad j : x \mapsto x - 5$ $\qquad k : x \mapsto 2x + 5$

► Exercice 9

Déterminer graphiquement l'expression algébrique des fonctions affines représentées ci-dessous



► Exercice 10

Deux cyclistes font une course sur une distance de 100 kilomètres. Le premier effectue le parcours à une vitesse de 40km/h. Le second fait la première moitié de la course à 50 km/h et la deuxième à une vitesse de 30km/h. Au temps t, on appelle $d_1(t)$ et $d_2(t)$ les distances parcourues par ces deux cyclistes.

1. Représenter la courbe de la fonction d_1 dans un repère orthogonal (on prendra un carreau = 10 km en ordonnées et 6 carreaux = 1 heures en abscisse).
2. Sur ce même repère, représenter la courbe de la fonction d_2
3. A quel instant les deux cyclistes se croisent-ils ?
4. Qui semble arriver en premier ?
5. Retrouver algébriquement les résultats à ces questions.

► Exercice 11

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 5$. Donner un encadrement de $f(a)$ pour $a \in [-3; 2]$

► Exercice 12

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 2$. Donner un encadrement de $f(a)$ pour $a \in [-5; 6]$

► Exercice 13

Déterminer le sens de variations des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$

$f : x \mapsto 2x - 4$ $\qquad$ $g : x \mapsto (2x - 5) - (3x - 8)$ $\qquad$ $h : x \mapsto (\sqrt{7} - 3)x + 5$

▶ Exercice 14

Construire les tableaux de signes et de variations des fonctions affines suivantes, définies sur $\mathbb{R}$

$f : x \mapsto 3x$ $\quad g : x \mapsto -1$ $\quad h : x \mapsto -2x+6$

$i : x \mapsto \dfrac{1}{2}x - 4$ $\quad j : x \mapsto -415x - 830$ $\quad k : x \mapsto 9+3x$

▶ Exercice 15

Un médecin généraliste évalue ainsi son chiffre d'affaires et ses dépenses :

- Ses charges fixes sont de 18000 €par an.
- Une consultation au tarif classique est payée 25€, mais le médecin en reverse environ 9% pour le compte de l'URSAFF et 23% pour la CARMF.

Ce médecin souhaite alors organiser au mieux son année.

1. Soit n le nombre de consultation du médecin à l'année. Exprimer $C(n)$, le chiffre d'affaire du médecin, en fonction de n.
2. Combien de consultations doit-il réaliser pour gagner au moins 36000 €annuels ?
3. S'il travaille 47 semaines par an, 4 jours par semaine, combien de consultations journalières cela représente-t-il ?

2 Fonction inverse

▶ Exercice 16

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

$f : x \mapsto \dfrac{1}{3x-8}$ $\quad g : x \mapsto \dfrac{1}{(2x-5)(x-3)}$

$h : x \mapsto \dfrac{3x-9}{(4x-8)(6x-3)}$ $\quad i : x \mapsto \dfrac{1}{(4x-7)(9-2x)}$

▶ Exercice 17

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

$f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3x-6}}$ $\quad g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x-9}$

$h : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x+2}}$ $\quad i : x \mapsto \dfrac{3x+1}{\sqrt{(4x-1)(2x+7)}}$

▶ Exercice 18

Deux corps ponctuels A et B, de masses respectives m_A et m_B, séparés d'une distance d exercent l'un sur l'autre une force gravitationnelle, dont la valeur est

$$F = G\frac{m_A m_B}{d^2}$$

où G est la constante universelle de gravitation.

1. Justifier que plus la distance entre les deux corps est grande, plus la force est faible.
2. Que se passe-t-il si la distance entre les deux corps est doublée ?

► Exercice 19

Dans chacun des cas suivants, comparer les inverses de a et b.

$a = 2$ et $b = 3$

$a = -2$ et $b = -3$

$a = 3$ et $b = \dfrac{\pi}{2}$

$a = -1$ et $b = 2$

$a = \sqrt{5} - 2$ et $b = 1$

$a = 6$ et $b = 0$

$a = \dfrac{26}{7}$ et $b = \dfrac{16}{3}$

$a = -\dfrac{8}{5}$ et $b = -\dfrac{3}{4}$

► Exercice 20

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Montrer que f est strictement décroissante sur son domaine de définition.

► Exercice 21

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$\dfrac{1}{x} = 2$

$\dfrac{3}{2x} = 5$

$\dfrac{3}{4x-6} = \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{1}{4x-2} = \dfrac{1}{3x+1}$

$\dfrac{2}{5x} = \dfrac{-4}{3x-1}$

$\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{x-2}$

► Exercice 22

Les piscines traitant l'eau au chlore doivent respecter plusieurs normes. Pour du chlore stabilisé, la concentration de chlore par litre d'eau doit être supérieure à 2 mg par litre et ne pas dépasser 4 mg par litre. On rappelle que la concentration massique C s'exprime en fonction de la masse m et du volume V selon la relation $C = \dfrac{m}{V}$

1. Pour une piscine de 60 000 litres, combien de grammes de chlore doit-on prévoir ?
2. Un particulier entretient une piscine en utilisant 200 grammes de chlore stabilisé. Quel peut être le volume de sa piscine, en m^3 ?

► Exercice 23

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$x^3 = 1$

$x^3 = -8$

$2x^3 = 54$

$x^3 = \dfrac{1}{8}$

$(2x-3)^3 = 64$

$x^3 = 0.001$

$(3x-5)^3 = -1$

$\dfrac{1}{x^3} = -\dfrac{1}{1000}$

$x^3 = 7\sqrt{7}$

► Exercice 24

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 1$

1. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
2. La fonction f est-elle impaire ?

► Exercice 25

Montrer que $(1 + 3\sqrt{5})^3 = 136 + 144\sqrt{5}$

► Exercice 26

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^3$

1. Montrer que f est impaire.
2. Sans calcul, donner la valeur de $f(100 - 4\pi + \sqrt{2}) + f(4\pi - 100 - \sqrt{2})$.

► Exercice 27

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x^3 - 27)(x^2 - 4)}{x^3 + 8}$

1. Donner le domaine de définition de f
2. Résoudre $f(x) = 0$ sur le domaine de définition de f

► Exercice 28

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 8x^2 + 5x - 50$.

1. Montrer que $f(2) = 0$.
2. Soit a,b,c et x quatre réels. Développer $(x - 2)(ax^2 + bx + c)$.
3. Pour déterminer une factorisation de $f(x)$ pour tout réel x, on identifie les coefficients des deux écritures. Retrouver une factorisation de $f(x)$ par ce procédé.

► Exercice 29

Soit a et b deux réels.

1. Montrer que si $a < 0 < b$, alors $a^3 < b^3$.
2. Montrer que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
3. On suppose que a et b sont de même signe et que $a < b$. Montrer que $a^3 < b^3$.
4. Résumer et conclure : qu'a-t-on démontré dans cet exercice ?