Chapitre XI : Fonctions de référence

1 Fonctions affines

1.1 Généralités

Définition 1 : On appelle *fonction affine* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ où m et p sont deux constantes réelles
Si, de plus, $p = 0$, on dit que la fonction f est linéaire.

■ **Exemple 1 :** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 2x + \sqrt{5}$ est une fonction affine.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -\dfrac{2}{3}x$ est une fonction linéaire. ■

Définition 2 : Avec les notations précédentes
- m est appelé *coefficient directeur* ou *pente* de la fonction affine
- p est *l'ordonnée à l'origine* de la fonction.

Propriété 1 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
f est une fonction affine si et seulement si le rapport $\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$ est constant.

Démonstration 1.1 :
- Supposons que f est une fonction affine. Alors il existe deux réels m et p tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$. Ainsi, pour tous réels distincts a et b :

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{ma + p - (mb + p)}{a - b} = \frac{m(a - b)}{a - b} = m$$

- Réciproquement, soit b un réel.
  Il existe un réel c tel que, pour tout réel x différent de b, on a $\dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} = c$.
  Ainsi, pour tout réel x différent de b, $f(x) - f(b) = c(x - b)$, c'est-à-dire $f(x) = cx - cb + f(b)$.
  Cette égalité est également vraie pour $x = b$.
  En posant alors $m = c$ et $p = cb + f(b)$, on pour tout réel x, $f(x) = mx + p$, f est affine.

□

■ **Exemple 2 :** Soit g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 1$.
- $\dfrac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \dfrac{2 - 1}{1 - 0} = 1$
- $\dfrac{g(2) - g(1)}{2 - 1} = \dfrac{5 - 2}{2 - 1} = 3$

Ces deux rapports sont différents, la fonction g n'est donc pas une fonction affine. ■

Propriété 2 : Soit f une fonction affine définie pour tout x réel par $f(x) = mx + p$. Soit x_1 et x_2 deux réels distincts. Alors $m = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ et $p = f(x_1) - mx_1$

■ **Exemple 3 :** Soit f la fonction affine telle que $f(2) = 5$ et $f(7) = 25$. On souhaite déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction du réel x.
On sait que $f(x)$ est de la forme $mx + p$, avec
- $m = \dfrac{f(2) - f(7)}{2 - 7} = \dfrac{5 - 25}{2 - 7} = \dfrac{-20}{-5} = 4$
- $p = f(2) - 4 \times 2 = 5 - 8 = -3$

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = 4x - 3$ ■

1.2 Représentation graphique

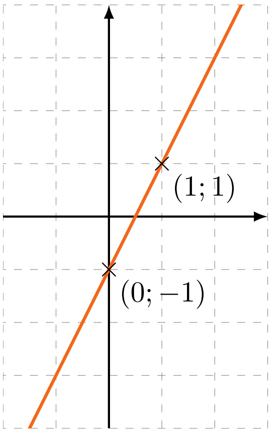
Propriété 3 : Une fonction est affine si et seulement si sa courbe représentative dans tout repère est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

R Cette remarque sera prouvée dans un prochain chapitre... Suspense !

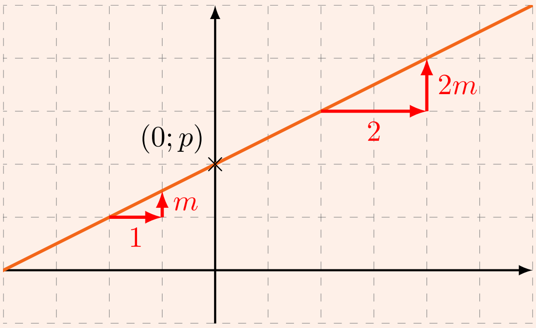
■ **Exemple 4 :** On souhaite représenter la fonction $f : x \mapsto 2x - 1$ dans un repère.

Puisque cette fonction est affine, sa courbe représentative dans n'importe quel repère est une droite. Il suffit de deux points pour la représenter.
- $f(0) = 2 \times 0 - 1 = -1$.
  La droite passe par le point de coordonnées $(0; -1)$
- $f(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$.
  La droite passer par le point de coordonnées $(1; 1)$

■



Propriété 4 — Interprétation graphique des coefficients. : :



■ **Exemple 5 :** La droite ci-dessous est la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x + 2$ ■

1.3 Signe et variations

Propriété 5 : Soit f une fonction affine définie pour tout x réel par $f(x) = mx + p$. Si $m \neq 0$, alors f s'annule en $x = -\frac{p}{m}$.

Démonstration 1.2 : Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow mx + p = 0 \Leftrightarrow mx = -p \Leftrightarrow x = -\frac{p}{m}$ □

Propriété 6 — Variations d'une fonction affine. : Soit f une fonction affine définie pour tout x réel par $f(x) = mx + p$

- Si $m < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- Si $m = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$
- Si $m > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Démonstration 1.3 : Soient a et b deux réels tels que $a > b$.
$f(a) - f(b) = ma + p - (mb + p) = ma - mb = m(a - b)$. Or, puisque $a > b$, alors $a - b > 0$. $f(a) - f(b)$ est donc du signe de m.

- Si $m < 0$, alors $f(a) - f(b) < 0$ donc $f(a) < f(b)$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- Si $m = 0$, alors $f(a) - f(b) = 0$ donc $f(a) = f(b)$ donc f est constante sur $\mathbb{R}$
- Si $m > 0$, alors $f(a) - f(b) > 0$ donc $f(a) > f(b)$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

□

Conséquence : Si $m \neq 0$, le tableau de signe de la fonction $f : x \mapsto mx + p$ est

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$mx + p$		Signe de $-m$	0	Signe de m	

R Tout ceci vous rappelle le chapitre sur le calcul algébrique ? C'est tout à fait normal, voyons.

2 Fonction inverse

Définition 3 : La fonction inverse est la fonction qui, à tout x dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, associe $\frac{1}{x}$

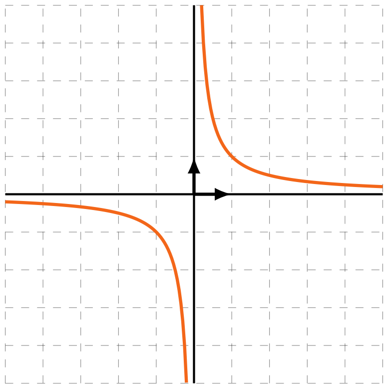
■ **Exemple 6 :** Notons f la fonction inverse. On a $f(2) = \frac{1}{2}$; $f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{5}{3}$ ■

■ **Exemple 7 :** Soit f la fonction qui à x associe $\frac{3}{x-2}$. f est définie si et seulement si $x - 2 \neq 0$. Son domaine de définition est donc $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. ■

Propriété 7 : La fonction inverse est impaire, strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ puis strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variation	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0
Signe		$-$	||	$+$	

Démonstration 2.1 : Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.
$\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b}{ab} - \dfrac{a}{ab} = \dfrac{b-a}{ab} < 0$. La fonction inverse est donc strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. Le même raisonnement permet de conclure sur $]-\infty;0[$. □



La courbe de la fonction inverse s'appelle une hyperbole.

Propriété 8 : Soit a un réel différent de 0. L'unique solution de l'équation $\dfrac{1}{x} = a$ est $x = \dfrac{1}{a}$

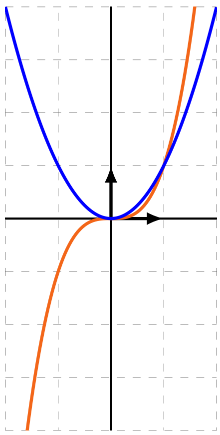
3 Fonction Cube

Définition 4 : On appelle fonction cube la fonction qui, à tout réel x, associe x^3.

Propriété 9 : La fonction cube est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variation		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
Signe		$-$	0	$+$	

Propriété 10 — Positions relatives de courbes. : Pour $x \leq 1$, $x^2 \geq x^3$: la courbe de la fonction carrée est au-dessus de la courbe de la fonction cube sur $]-\infty; 1]$.
Pour $x \geq 1$, $x^2 \leq x^3$: la courbe de la fonction carrée est en-dessous de la courbe de la fonction cube sur $[1; +\infty[$.



Démonstration 3.1 : On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x^3$.
Pour tout x, $f(x) = x^2(1-x)$. Or, $x^2 \geq 0$, f est donc du signe de $(1-x)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. □