Matrices

1 Notion de matrices

Définition 1 : Une **matrice** de dimension $n \times p$ est la données de np nombres (réels, complexes, entiers...) présentés sous la forme d'un tableau composé de n lignes et p colonnes.

■ **Exemple 1 :** $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ est une matrice d'entiers relatifs de dimension 2×3.

$\begin{pmatrix} 1+5i & 3-i \\ 2 & i \end{pmatrix}$ est une matrice complexe de dimension 2×2. ■

Définition 2 : Quelques **matrices particulières**...

- Une matrice composée d'une seule ligne est appelée **matrice ligne**.
- Une matrice composée d'une seule colonne est appelée **matrice colonne**.
- Une matrice composée d'autant de ligne que de colonnes est appelée **matrice carrée**.

■ **Exemple 2 :** $\begin{pmatrix} 7 \\ 1{,}2 \\ -3{,}8 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne de dimension 3×1.

$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \pi & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est une matrice ligne de dimension 1×4.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & \pi & 5 \\ 2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de dimension 3×3 (ou simplement matrice carrée de taille 3). ■

Définition 3 : Soit A une matrice de dimension $n \times p$, i un entier compris entre 1 et n et j un entier compris entre 1 et p.

On appelle **coefficient** (i,j) de la matrice A le nombre situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

Lorsque la matrice est désigné par une lettre majuscule, ses coefficients sont en général désignés par la lettre minuscule associée.

On écrira alors $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant p}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

■ **Exemple 3 :** Dans la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$, pour laquelle le coefficient (i,j) est noté $a_{i,j}$, on a $a_{1,1} = 7$, $a_{2,1} = 1$ et $a_{2,3} = 9$. ■

■ **Exemple 4 :** On considère la matrice A de dimension 2×3 dont le coefficient (i,j) vaut $a_{i,j} = ij^2$. On a alors

- $a_{1,1} = 1 \times 1^2 = 1$
- $a_{1,2} = 1 \times 2^2 = 4$
- $\dots$
- $a_{2,3} = 2 \times 3^2 = 18$

Finalement, on obtient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 8 & 18 \end{pmatrix}$ ■

Définition 4 : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant p}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant p}$ deux matrices de même dimension.

Les matrices A et B sont égales si et seulement si, pour tout entier i entre 1 et n et tout entier j entre 1 et p, $a_{i,j} = b_{i,j}$.

Autrement dit, deux matrices sont égales si leurs coefficients sont égaux...

Définition 5 : Quelques matrices particulières...

- On appelle **matrice nulle** de dimension $n \times p$ la matrice notée 0_{np} dont tous les coefficients valent 0.
- On appelle **matrice identité** de dimension n la matrice carrée notée I_n dont tous les coefficients diagonaux valent 1 et tous les autres valent 0.

■ **Exemple 5 :** $0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ■

2 Opérations sur les matrices

2.1 Produit d'une matrice par un réel

Définition 6 : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant p}$ une matrice et λ un complexe. La matrice λA est la matrice de taille $n \times p$ dont les coefficients sont égaux aux coefficients de A multipliés par λ. Autrement dit,

$$\lambda A = (\lambda\, a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant p} = \begin{pmatrix} \lambda\, a_{1,1} & \lambda\, a_{1,2} & \cdots & \cdots & \lambda\, a_{1,p} \\ \lambda\, a_{2,1} & \lambda\, a_{2,2} & \cdots & \cdots & \lambda\, a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda\, a_{n,1} & \lambda\, a_{n,2} & \cdots & \cdots & \lambda\, a_{n,p} \end{pmatrix}$$

■ **Exemple 6 :** Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & -8 & 9 \end{pmatrix}$, alors $9A = \begin{pmatrix} 9 & 45 & -18 \\ 27 & -72 & 81 \end{pmatrix}$ ■

2.2 Somme de matrices

Définition 7 : Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\,1\leqslant j\leqslant p}$ et $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\,1\leqslant j\leqslant p}$ deux matrices de même dimension.

La matrice $A+B$ est la matrice de dimension $n\times p$ dont le coefficient (i,j) vaut $a_{i,j}+b_{i,j}$.

$$A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\,1\leqslant j\leqslant p}=\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}$$

■ **Exemple 7 :** Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Alors $A+B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$. ■

Propriété 1 : Soit A, B et C deux matrices de dimension $n\times p$, λ et μ deux complexes.

- $A+B=B+A$: l'addition de matrice est **commutative**.
- $A+0_{n,p}=A$
- $(A+B)+C=A+(B+C)$: l'addition de matrices est **associative**.
- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.
- $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

Pour le moment, tout se passe pour le mieux.

2.3 Produit de matrices

Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition 8 : Soit $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ une matrice ligne de dimension $1\times p$ et $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne de dimension $p\times 1$.

Le produit AB est la matrice de dimension 1×1 qui vaut

$$AB=\begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_pb_p \end{pmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{p} a_ib_i\right)$$

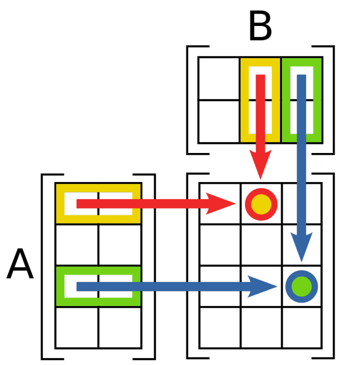
■ **Exemple 8 :** Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. $AB=(1\times 8+3\times(-2)+(-5)\times 3)=(-13)$ ■

Produit de deux matrices

Définition 9 : Soit A une matrice de dimension $n \times p$ et B une matrice de dimension $p \times q$.

Le produit AB est la matrice de dimension $n \times q$ dont le coefficient (i,j) est égal au coefficient du produit de la i-ième ligne de A par la j-ième colonne de B.

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \cdots + a_{1,p}b_{p,1} & \dots & a_{1,1}b_{1,q} + a_{1,2}b_{2,q} + \cdots + a_{1,p}b_{p,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}b_{1,1} + a_{n,2}b_{2,1} + \cdots + a_{n,p}b_{p,1} & \dots & a_{n,1}b_{1,q} + a_{n,2}b_{2,q} + \cdots + a_{n,p}b_{p,q} \end{pmatrix}$$



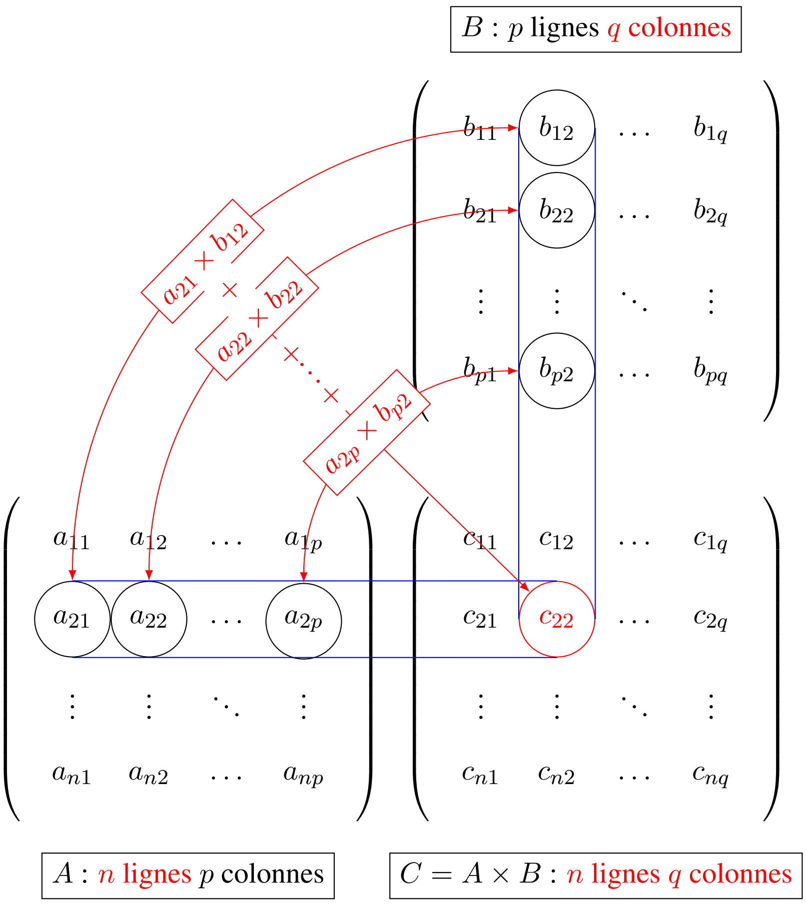
Important

Il n'est pas possible de multiplier n'importe quels matrices entre elles. Deux matrices peuvent être multipliées si et seulement si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde.

Illustration

Pour ne pas se perdre dans le calcul du produit de deux matrices, il peut être utile de se les représenter sous cette forme. La première matrice est à gauche et la deuxième matrice est au-dessus de la matrice produit à obtenir.

A retenir : (Matrice $N\times$ **P**) $\times$ (Matrice **P** $\times$ Q) = Matrice $N \times Q$



■ **Exemple 9 :** On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

A est de dimension 2×3 et B est de dimension 3×4. Il est donc possible de calculer le produit AB : ce produit sera de dimension 2×4.

- Le coefficient $(1{,}1)$ de AB est égal au coeff du produit de la ligne 1 de A et de la colonne 1 de B.
  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 \times 1 + 2 \times 7 + 5 \times 2) = (25)$.
  Le coefficient $(1{,}1)$ de AB vaut donc 25.
- Le coefficient $(2{,}1)$ de AB vaut $3 \times 1 + 1 \times 7 + 2 \times 2 = 14$
- ...
- Le coefficient $(2{,}3)$ de AB vaut $3 \times 6 + 1 \times 1 + 2 \times 0 = 19$

En faisant ainsi tous les calculs, on obtient

$$AB = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 8 & -1 \\ 14 & 17 & 19 & 0 \end{pmatrix}$$

■

(R) Attention ! La multiplication des matrices n'est pas commutative, même lorsque les matrices sont de même taille.

■ **Exemple 10 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Alors,

- $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times (-1) & 1 \times 0 + 2 \times 3 \\ 0 \times 2 + 1 \times (-1) & 0 \times 0 + 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
- $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 0 & 2 \times 1 + 0 \times 1 \\ -1 \times 1 + 3 \times 2 & -1 \times 2 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
  Ainsi, $AB \neq BA$. On dit que les matrices A et B ne commutent pas.

■

Propriétés de calcul

Propriété 2 : Soit A une matrice de dimension $n \times p$.

- $0_{m,n} \times A = 0_{m,p}$ et $A \times 0_{p,q} = 0_{n,q}$.
- $I_n \times A = A \times I_p = A$

La seule difficulté ici se trouve dans les dimensions des matrices.

Attention : ce n'est pas parce que l'on a deux matrices A et B qui vérifient $AB = 0$ que l'on a forcément $A = 0$ ou $B = 0$!

■ **Exemple 11 :** Prenons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ■

Propriété 3 : Soit A et B deux matrices de dimension $n \times p$, C et D deux matrices de taille $p \times q$, λ et μ deux complexes.

- $(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$
- $A(\lambda C + \mu D) = \lambda AC + \mu AD$

■ **Exemple 12 :**

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)\\
&= \begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}\times 3I_2\\
&= 3\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3&9\\6&15\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

■

Attention, on rappelle que la multiplication de matrices n'est pas commutative ! Il faut, lorsque l'on factorise, que la matrice soit à chaque fois « du bon côté ».

Par exemple, on ne factorisera par par $\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}$ dans l'expression $\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&2\\-1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&2\\5&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}$

Propriété 4 : Soit A une matrice de dimension $m \times n$, B une matrice de dimension $n \times p$ et C une matrice de dimension $p \times q$. Alors

$$(AB)C = A(BC)$$

2.4 Puissance d'une matrice carrée

Définition 10 : Soit A une matrice carrée de dimension p et n un entier naturel.

On définit par A^n la matrice égale à $A \times A \times \cdots \times A$ où la matrice A apparaît n fois.

Par ailleurs, $A^0 = I_n$.

■ **Exemple 13 :** Soit $A = \begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}$. Alors

- $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times1+3\times2 & 1\times3+3\times-1\\ 2\times1+(-1)\times2 & 2\times3+(-1)\times(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7&0\\0&7\end{pmatrix} =$
- $A^3 = A^2 \times A = 7I_2 \times \begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7&21\\14&-7\end{pmatrix}$

On pourrait d'ailleurs montrer que pour tout entier naturel n, $A^{2n} = 7^n I_2$ et $A^{2n+1} = 7^n A$... ■

3 Matrices inversibles

3.1 Inverse d'une matrice

Définition 11 : Soit A une matrice carré de dimension n. On dit que A est inversible s'il existe une matrice carrée B de dimension n telle que $AB = BA = I_n$.

Si une telle matrice existe, elle est unique et est appelée inverse de A. On la note alors A^{-1}.

Démonstration 3.1 : Supposons qu'il existe deux matrices B et B' telles que $AB = BA = I_n$ et $AB' = B'A = I_n$.

Alors $B' = I_nB = (BA)B' = B(AB') = BI_n = B$. On a donc $B' = B$. □

Propriété 5 : Soit A et B deux matrices carrées de dimension n. Alors $AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$.

Dans les faits, pour montrer qu'une matrice B est l'inverse d'une matrice A, il suffit seulement de vérifier que $AB = I_n$.

■ **Exemple 14 :** L'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ est la matrice $\begin{pmatrix} 2{,}5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. En effet,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2{,}5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 2{,}5 + 4\times(-1) & 2\times(-2)+4\times 1 \\ 2\times 2{,}5 + 5\times(-1) & 2\times(-2)+5\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

■

■ **Exemple 15 :** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On souhaite déterminer si la matrice A est inversible et, si c'est le cas, calculer son inverse. Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ 3a+4c & = & 0 \\ 3b+4d & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ c & = & -\dfrac{3}{4} \\ d & = & \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

Ainsi, l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ ■

3.2 Matrice de dimension 2×2

Propriété 6 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de dimension 2×2. Alors A est inversible si et seulement si $ac - bc \neq 0$. Dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration 3.2 : On a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ac+ac \\ bd-bd & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$$

- Si $ad - bc \neq 0$, alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = I_2$, et on obtient le résultat voulu
- Si $ad - bc = 0$, supposons que A est inversible. Notons A^{-1} son inverse et B la matrice $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$B = I_2B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1} \times (ad-bc)I_2 = A^{-1} \times 0_{2,2} = 0_{2,2}$$

Ainsi, $B = 0_{2,2}$ et tous ses coefficients sont nuls. On a alors $a = b = c = d = 0$. C'est absurde, car on a supposé la matrice A inversible. La matrice A n'est donc pas inversible.

□

■ **Exemple 16 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. A est inversible et son inverse est $A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ■

3.3 Application : systèmes linéaires

Propriété 7 : Soit A une matrice carrée de dimension n, X et B deux matrices colonnes de dimension $n \times 1$.

Si A est inversible, alors $AX = B$ si et seulement si $X = A^{-1}B$.

■ **Exemple 17 :** On considère le système suivant : $\begin{cases} 2x + 3y - z & = & 1 \\ 3x - y + z & = & 3 \\ 4x - 2y + z & = & 5 \end{cases}$

Ce système peut se traduire par l'écriture matricielle $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Or, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse, $\frac{1}{7} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & -5 \\ -2 & 16 & -11 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & -5 \\ -2 & 16 & -11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

■