Matrices

1 Notion de matrices

▶ Exercice 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & -3 \\ 2 & 6 & -8 & 0 \\ 7 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

1. Quelle est la dimension de la matrice A ?
2. Que valent $a_{1,2}$, $a_{3,3}$ et $a_{2,4}$?

▶ Exercice 2

Ecrire sous la forme d'un tableau de nombres la matrice 3×3 dont le coefficient (i,j) vaut i^j.

▶ Exercice 3

Ecrire les matrices suivantes sous la forme d'un tableau de nombres

- $A = (i+j)_{1\leqslant i\leqslant 3, 1\leqslant j\leqslant 3}$
- $B = (\max(i,j))_{1\leqslant i\leqslant 3, 1\leqslant j\leqslant 4}$
- $C = \left(\dfrac{np}{n+p}\right)_{1\leqslant n\leqslant 3, 1\leqslant p\leqslant 2}$
- $D = (i+1)_{1\leqslant i\leqslant 2, 1\leqslant j\leqslant 2}$
- $E = (i^{n+p})_{1\leqslant n\leqslant 4, 1\leqslant p\leqslant 4}$ où i désigne ici un nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

▶ Exercice 4

Soit A une matrice de dimension $n\times p$. On appelle transposée de A, notée A^T, la matrice de dimension $p \times n$ dont le coefficient (i,j) vaut $a_{j,i}$.

Déterminer la transposée de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

▶ Exercice 5

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n}$ une matrice carrée de dimension n. On appelle trace de A la somme des coefficients diagonaux de la matrice A. On a donc $tr(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$. Determiner la trace des matrices suivantes.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = (ij)_{1\leqslant i\leqslant 3, 1\leqslant j\leqslant 3}$ $\quad C = I_n$ $\quad D = (i+j)_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n}$

2 Opérations sur les matrices

▶ Exercice 6

Soit $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -1 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$. Calculer $A+B$, $3A-2B$ et $\frac{2}{3}A+\frac{1}{4}B$.

▶ Exercice 7

Effectuer les calculs suivants

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ 0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}-1 & 3 & -5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\ -5\\ -7\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1-2i & i & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2+3i\\ 1+i\\ i-5\end{pmatrix}$$

▶ Exercice 8

Déterminer la valeur du réel x pour que $\begin{pmatrix}3x & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\ x\\ 3\end{pmatrix}=(12)$.

▶ Exercice 9

Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & 7\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 5\end{pmatrix}$.

Parmi les produits suivants, déterminer ceux qui ont un sens et déterminer le résultat.

AB	AC	BC	CA	CB
AD	CD	DC	BD	DB

▶ Exercice 10

Déterminer les valeurs des réels a, b, c et d pour que $\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -7\\ -2 & 10\end{pmatrix}$.

▶ Exercice 11

Soit a, b, c et d quatre réels. Montrer que les matrices $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & c\end{pmatrix}$ commutent.

▶ Exercice 12

Soit $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -3 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Montrer que $A^2=2A$ et en déduire A^n pour tout entier naturel n.

▶ Exercice 13

Soit $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ et $B=A-I_2$.

1. Calculer B puis B^2
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n=I_2+nB$

► Exercice 14
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

► Exercice 15
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Conjecturer une expression de A^n en fonction de n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

► Exercice 16
Soit a, b et c trois réels et $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Conjecturer une expression de A^n en fonction de n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

► Exercice 17
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2
2. Déterminer deux réels α et β tels que $A^2 + \alpha A + \beta I_3 = 0$

► Exercice 18
Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = 0$.

3 Matrices inversibles

► Exercice 19
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. Vérifier que $A^2 + A = 2I_3$
3. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

► Exercice 20
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Vérifier que $A^3 - A^2 - 2A = 4I_3$
3. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

► Exercice 21
Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, déterminer leur inverse.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i & 2 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

► Exercice 22
Soit n un entier naturel, A et B deux matrices carrées de dimension n et $C = AB$.

1. On suppose que la première ligne de A est uniquement composée de 0. Calculer $c_{1,1}$.
2. La matrice A peut-elle être inversible ?
3. Généraliser : une matrice peut-elle être inversible si une de ses lignes est nulle ?
4. Une matrice peut-elle être inversible si une de ses colonnes est nulle ?

► Exercice 23

Soit n un entier naturel et M une matrice de dimension n. On dit que M est nilpotente de rang p si $M^p = 0_n$ et $M^{p-1} \neq 0_n$.

1. Soit B une matrice nilpotente de rang p
   (a) Calculer le produit $(I_3 - B)(I_3 + B + B^2 + ... + B^{p-1})$.
   (b) En déduire que $I_3 - B$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est nilpotente puis déterminer l'inverse de $I_3 - A$.

► Exercice 24

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer PQ.
2. On note $B = PAQ$. Calculer B puis B^n pour tout entier naturel n.
3. En déduire une expression de A^n pour tout entier naturel n.

► Exercice 25

Traduire les systèmes suivants sous forme matricielle

$$\begin{cases} 4x - 5y &= 1 \\ 2x + 3y &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y - z &= 2 \\ 3x + y - z &= 5 \\ 5x + 2y + 4z &= 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z + 3t &= 1 \\ y - z + t &= 5 \\ 2x + 3y - 4z + 2t &= 3 \end{cases}$$

► Exercice 26

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit AB.
2. Traduire sous forme matricielle puis résoudre les système suivants.
$$\begin{cases} x - y + z &= 2 \\ -x + 2y - z &= 0 \\ -x + 2y - 2z &= 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + z &= 1 \\ x + y &= 3 \\ y - z &= 6 \end{cases}$$

► Exercice 27

Soit a, b et c trois réels et f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$. On souhaite déterminer les valeurs des réels a tels que $f(0) = 5$, $f(1) = 2$ et $f(2) = 6$

1. Justifier que ce problème revient à résoudre le système matriciel $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$
2. On admet que l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0{,}5 & \alpha & 0{,}5 \\ \beta & 2 & -0{,}5 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Déterminer les valeurs manquantes
3. En déduire les valeurs des réels a, b et c solutions du problème.