DM 1 : Récurrence

► Exercice 1 — Amérique du Nord 2022.

On s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four. On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180° C et celle de l'air de 20° C.

La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par une suite (T_n) définie par $T_0 = 180$ et, pour tout entier naturel n,

$$T_{n+1} = 0{,}955T_n + 0{,}9$$

Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

1. La température au bout de 2 minutes est données par T_2. Or,
   - $T_1 = 0{,}955T_0 + 0{,}9 = 172{,}8$
   - $T_2 = 0{,}955T_1 + 0{,}9 = 165{,}924$.

   Au bout de deux minutes, la température du gâteau est d'environ 165,9 degrés Celsius.
2. Calculer la température du gâteau 2 minutes après la sortie du four. On donnera une réponse arrondie au dixième de degré Celsius.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $P(n)$: $T_n \geqslant 20$.
   - Initialisation : $T_0 = 180$. On a bien $T_0 \geqslant 20$. $P(0)$ est vraie.
   - Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a alors $T_n \geqslant 20$. En multipliant cette inégalité par $0{,}955$ et en ajoutant $0{,}9$, on obtient

     $$0{,}955T_n + 20 \geqslant 0{,}955 \times 20 + 0{,}9$$

     c'est-à-dire

     $$T_{n+1} \geqslant 20$$

     $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Conclusion : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. $P(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n.
4. Soit n un entier naturel

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= 0{,}955T_n + 0{,}9 - T_n \\ &= -0{,}045T_n + 0{,}9 \\ &= -0{,}045\left(T_n - \frac{0{,}9}{0{,}045}\right) \\ &= -0{,}045(T_n - 20) \end{aligned}$$

5. D'après la question 2, pour tout entier naturel n, $T_n \geqslant 20$ et donc $T_n - 20 \geqslant 0$. Ainsi, $-0{,}045(T_n - 20) \leqslant 0$, ce qui signifie que $T_{n+1} - T_n \leqslant 0$. Finalement, on a bien $T_{n+1} \leqslant T_n$. La suite (T_n) est décroissante.
6. A la sortie du four, la température du gâteau diminue mais reste au-dessus de la température de l'air ambiant. Nous verrons dans un prochain chapitre sur les limites de suite que la température du gâteau se rapproche en effet de 20 degrés Celsius.

► Exercice 2

Soit k un réel positif et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + k^2}$.

1. On a
   - $u_1 = \sqrt{0^2 + k^2} = \sqrt{k^2} = k$
   - $u_2 = \sqrt{k^2 + k^2} = \sqrt{2k^2} = k\sqrt{2}$
   - $u_3 = \sqrt{(k\sqrt{2})^2 + k^2} = \sqrt{2k^2 + k^2} = \sqrt{3k^2} = k\sqrt{3}$
2. Il semble que pour tout entier naturel n, $u_n = k\sqrt{n}$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $P(n)$: $u_n = k\sqrt{n}$.
   - Initialisation : $u_0 = 0$ et $k\sqrt{0} = 0$. $P(0)$ est vraie.

- Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a alors $u_n = k\sqrt{n}$. Alors,

$$u_{n+1} = \sqrt{(k\sqrt{n})^2 + k^2} = \sqrt{nk^2 + k^2} = \sqrt{(n+1)k^2} = (n+1)\sqrt{3}$$

  $P(n+1)$ est donc vraie.
- Conclusion : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. $P(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n.