DM 1 : Récurrence

► Exercice 1 — Amérique du Nord 2022.

On s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four. On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180° C et celle de l'air de 20° C.

La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par une suite (T_n) définie par $T_0 = 180$ et, pour tout entier naturel n,

$$T_{n+1} = 0{,}955T_n + 0{,}9$$

Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

1. Calculer la température du gâteau 2 minutes après la sortie du four. On donnera une réponse arrondie au dixième de degré Celsius.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \geqslant 20$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = -0{,}045(T_n - 20)$.
4. En déduire que la suite (T_n) est décroissante.
5. Interpréter les résultats des questions 2 et 4 dans le contexte de l'exercice.

► Exercice 2

Soit k un réel positif et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + k^2}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 en fonction de k.
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de k et n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

DM 1 : Récurrence

► Exercice 1 — Amérique du Nord 2022.

On s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four. On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180° C et celle de l'air de 20° C.

La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par une suite (T_n) définie par $T_0 = 180$ et, pour tout entier naturel n,

$$T_{n+1} = 0{,}955T_n + 0{,}9$$

Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

1. Calculer la température du gâteau 2 minutes après la sortie du four. On donnera une réponse arrondie au dixième de degré Celsius.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \geqslant 20$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = -0{,}045(T_n - 20)$.
4. En déduire que la suite (T_n) est décroissante.
5. Interpréter les résultats des questions 2 et 4 dans le contexte de l'exercice.

► Exercice 2

Soit k un réel positif et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + k^2}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 en fonction de k.
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de k et n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.