DM2 : Récurrence, dérivation

► **Exercice 1**

Pour chacune des fonctions suivantes, donner leur domaine de définition, de dérivation, ainsi qu'une expression de leur dérivée.

La fonction $f : x \mapsto 3x^2 - 5x - \dfrac{3}{x^4}$ est définie et dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Pour tout réel non nul x,

$$f'(x) = 6x - 5 + \frac{12}{x^5}$$

La fonction $g : x \mapsto (1+4x)e^{3x+1}$ est un produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et est donc elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$g'(x) = 4e^{3x+1} + (1+4x) \times 3e^{3x+1} = (12x+7)e^{3x+1}$$

La fonction $h : x \mapsto \dfrac{x^2+x}{3x-4}$ est définie et dérivable sur $\left]-\infty; \dfrac{4}{3}\right[$ et $\left]\dfrac{4}{3}; +\infty\right[$. Pour tout réel x différent de $\dfrac{4}{3}$, on a

$$h'(x) = \frac{(2x+1)(3x-4) - (x^2+x)3}{(3x-4)^2} = \frac{3x^2 - 8x - 4}{(3x-4)^2}$$

La fonction $k : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x-4}$ est définie sur $[0; 4[\cup]4; +\infty[$ et dérivable sur $]0; 4[$ et $]4; +\infty[$. Pour tout réel $x \in]0; 4[\cup]4; +\infty[$,

$$k'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (x-4) - \sqrt{x} \times 1}{(x-4)^2} = \frac{\frac{x-4}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x-4)^2} = \frac{x-4-2x}{2(x-4)^2\sqrt{x}} = \frac{-x-4}{2(x-4)^2\sqrt{x}}$$

► **Exercice 2**

On considère la fonction $x \mapsto \dfrac{2x^2-3}{3x-4}$, définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$.

1. On admet que f est dérivable sur tout intervalle inclus dans D.Pour tout réel x dans D,

$$f'(x) = \frac{4x \times (3x-4) - (2x^2-3) \times 3}{(3x-4)^2} = \frac{6x^2 - 16x + 9}{(3x-4)^2}$$

2. Pour tout $x \in D$, $(3x-4)^2 > 0$. Il ne reste donc qu'à étudier le signe de $6x^2 - 16x + 9$. Il s'agit d'un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = (-16)^2 - 4 \times 6 \times 9 = 40$. Ainsi, ce polynôme admet deux racines réelles

$$x_1 = \frac{-(-16) - \sqrt{40}}{2 \times 6} = \frac{16 - 2\sqrt{10}}{12} = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{10}}{6}$$

et

$$x_2 = \frac{-(-16) + \sqrt{40}}{2 \times 6} = \frac{16 + 2\sqrt{10}}{12} = \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{10}}{6}$$

On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		x_1		$\frac{4}{3}$		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{3u_n - 4}$$

3. On a

$$u_1 = \frac{2 \times 5^2 - 3}{3 \times 5 - 4} = \frac{47}{11}$$

4. Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition $3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   - Initialisation : On a bien $3 \leqslant \dfrac{47}{11} \leqslant 5$, c'est-à-dire $3 \leqslant u_1 \leqslant u_0$. $P(0)$ est vraie.
   - Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire $3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. La fonction f est croissante sur $\left[\dfrac{4}{3} + \dfrac{\sqrt{10}}{6}; +\infty\right[$. Or, 3 est dans cet intervalle. La fonction f est donc croissante sur $[3; +\infty[$ et on peut donc l'appliquer à l'inégalité sans en changer le sens. On a donc

     $$f(3) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$$

     c'est-à-dire

     $$3 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$

     $P(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
5. Si on avait $u_0 = 1$, on aurait alors $u_1 = \dfrac{2 \times 1^2 - 3}{3 \times 1 - 4} = \dfrac{-1}{-1} = 1$, et ainsi de suite. La suite serait constante, égale à 1.

► Exercice 3

On considère la suite u_n définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

1. On a
   - $u_1 = u_0 + \frac{1}{(0+1)(0+2)} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
   - $u_2 = u_1 + \frac{1}{(1+1)(1+2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
   - $u_3 = u_2 + \frac{1}{(2+1)(2+2)} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$
2. Il semble que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n}{n+1}$
3. Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition $u_n = \frac{n}{n+1}$.
   - Initialisation : $u_0 = 0$ et $\frac{0}{0+1} = 0$. On a bien $u_0 = \frac{0}{0+1}$. $P(0)$ est vraie.
   - Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire $u_n = \frac{n}{n+1}$. Alors,

     $$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

     Ainsi,

     $$u_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

     $P(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.