

DM2 : Récurrence, dérivation

► Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, donner leur domaine de définition, de dérivation, ainsi qu'une expression de leur dérivée.

$$f : x \mapsto 3x^2 - 5x - \frac{3}{x^4}$$

$$g : x \mapsto (1 + 4x)e^{3x+1}$$

$$h : x \mapsto \frac{x^2 + x}{3x - 4}$$

$$k : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x - 4}$$

► Exercice 2

On considère la fonction $x \mapsto \frac{2x^2 - 3}{3x - 4}$, définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{4}{3} \right\}$.

1. On admet que f est dérivable sur tout intervalle inclus dans D . Montrer que pour tout réel x dans D ,

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 16x + 9}{(3x - 4)^2}$$

2. Construire le tableau de variations de f sur D .

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{3u_n - 4}$$

3. Calculer u_1
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $3 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
5. Que se passerait-il si on avait $u_0 = 1$?

► Exercice 3

On considère la suite u_n définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 . Les exprimer sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.