DM2 : Limites, dérivation

► Exercice 1

Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n}{e^{-n}-1} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-5n+3}{n^3+2n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^5-4n^3}{n^2-2n^4}$$

► Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,

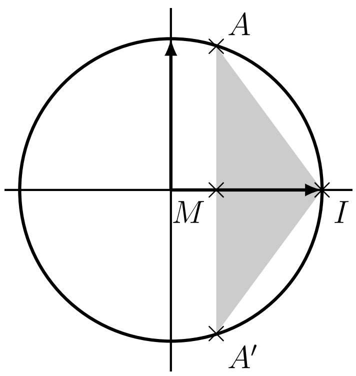
$$u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n}$$

1. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante et minorée par $\frac{3}{2}$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3(n+4)}{2(n+3)}$
3. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

► Exercice 3

On se place dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ orthonormé. On considère le cercle C de centre O et de rayon 1. On rappelle qu'une équation cartésienne de ce cercle est $x^2+y^2=1$. On note par ailleurs I le point de coordonnées $(1,0)$.

Soit $x \in [-1,1]$. On considère le point M de coordonnées $(x,0)$. La perpendiculaire à l'axe des abscisses coupe le cercle en deux points A et A', A étant le point d'ordonnée positive. L'objectif est de déterminer la valeur du réel x pour laquelle l'aire du triangle IAA' est maximale.



1. Montrer que l'aire du triangle IAA' vaut $(1-x)\sqrt{1-x^2}$. On pourra utiliser le résultat de cette question pour la suite de l'exercice.
2. On considère désormais la fonction $f : x \mapsto (1-x)\sqrt{1-x^2}$, définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.
   (a) Montrer que pour tout réel $x \in]-1,1[$,
   $$f'(x) = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
   (b) En déduire les variations de f sur $[-1,1]$.
   (c) Pour quelle valeur de x l'aire du triangle IAA' est-elle maximale ? Que vaut alors cette aire ?
   (d) Quelle est alors la nature du triangle IAA' ?