DS1 : Récurrence, dérivation

► Exercice 1 — Étude d'une fonction.

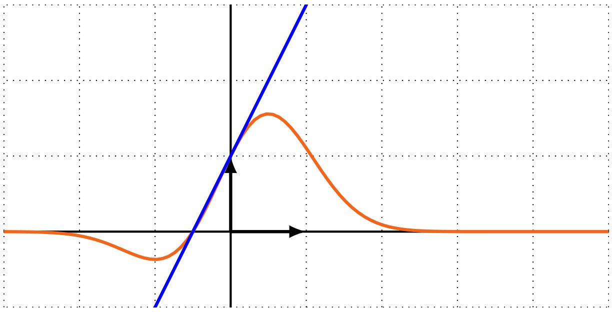
Soit f la fonction définie pour tout réel x par

$$f(x) = (2x+1)e^{-x^2}$$

1. Soit x un réel. On a $f(x) = 0 \Leftrightarrow (2x+1)e^{-x^2} = 0$. Or, $e^{-x^2} > 0$ (et en particulier est non nul). Ainsi, $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$
2. La dérivée de la fonction $g : x \mapsto e^{-x^2}$ est la fonction $g' : x \mapsto -2xe^{-x^2}$
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,
$$f'(x) = 2 \times e^{-x^2} + (2x+1) \times (-2x)e^{-x^2} = (2 - 2x - 4x^2)e^{-x^2}$$
4. Puisque pour tout réel x, $e^{-x^2} > 0$, f' est du signe de $2 - 2x - 4x^2$. Il s'agit d'un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $(-2)^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 36$. Ce polynôme admet donc deux racines :
$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{36}}{2 \times (-4)} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{36}}{2 \times (-4)} = -1$$
Il est alors possible de construire le tableau de signes de f' ($2 - 2x - 4x^2$ est du signe de -4, c'est-à-dire négatif, à l'extérieur des racines). On en déduit également les variations de f.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

5. La tangente à la courbe de f à l'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. Or, $f'(0) = 2$ et $f(0) = 1$. La tangente a donc pour équation $y = 2x+1$
6. Pour représenter l'allure de la courbe
   - On place les points d'abscisses -1 et $\dfrac{1}{2}$, puisque les changements de variations se produisent à ces abscisses.
   - On place le point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$: la courbe passe par ce point d'après la question 1
   - On trace la tangente en premier. Elle passe par le point (0,1) et est de coefficient directeur 2
   - On trace la courbe en respectant les variations. En 0, la courbe est proche de la tangente. Avant $-\dfrac{1}{2}$, la courbe est sous l'axe des abscisses. Après, elle est au-dessus.



► Exercice 2 — Étude d'une suite définie à l'aide d'une fonction.

Soit f la fonction définie pour tout réel x différent de -3 par

$$f(x) = \frac{7x-3}{3+x}$$

1. On admet que f est dérivable sur chaque intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{7(3+x)-(7x-3)}{(3+x)^2} = \frac{24}{(3+x)^2}$$

2. Puisque pour tout réel $x > 0$, $f'(x) > 0$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On considère désormais la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{7u_n - 3}{3+u_n}$$

1. Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$ »
   - Initialisation : $u_0 = 2$, $u_1 = \dfrac{7\times 2-3}{3+2} = \dfrac{11}{5} = 2{,}2$. On a bien $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 3$. $P(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a alors $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$. On applique alors la fonction f, qui est croissante sur $[0;+\infty[$ (et donc, sur $[2;3]$). Cela ne change donc pas l'ordre des images. On a alors

   $$f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(3)$$

   Or, $f(2) = \dfrac{11}{5}$ qui est lui-même supérieur à 2, et $f(3) = 3$. Par ailleurs, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$. Il en vient que

   $$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3$$

   $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Conclusion : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
2. D'après la question précédente, puisque pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$, la suite (u_n) est croissante.
3. On cherche désormais les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) serait constante.

(a) La suite (u_n) est constante si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$, c'est-à-dire $\dfrac{7u_n - 3}{3 + u_n} = u_n$. On cherche donc à résoudre l'équation $x = \dfrac{7x-3}{3+x}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. $x = \dfrac{7x-3}{3+x} \Leftrightarrow x(3+x) = 7x - 3 \Leftrightarrow 3x + x^2 - 7x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$. Il s'agit d'un polynôme du second degré dont les racines sont 1 et 3 : ce sont les solutions recherchées.

► Exercice 3 — Conjecturer le terme général d'une suite.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$$

1. On a
   - $u_1 = \dfrac{1}{2 - u_0} = \dfrac{1}{2}$
   - $u_2 = \dfrac{1}{2 - u_1} = \dfrac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$
   - $u_3 = \dfrac{1}{2 - u_2} = \dfrac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{4}$
2. Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ »
   - Initialisation : $u_0 = 0$ et $\dfrac{0}{1+0} = 0$. $P(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a alors $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Alors,

     $$u_{n+1} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

     $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Conclusion : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.