DS1 : Récurrence, dérivation

► Exercice 1 — Étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie pour tout réel x par

$$f(x) = (2x+1)e^{-x^2}$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. Donner la dérivée de la fonction $g : x \mapsto e^{-x^2}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = (2-2x-4x^2)e^{-x^2}$$

4. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f à l'abscisse 0.
6. Représenter l'allure de cette courbe dans un repère orthonormé. On tracera également sur le graphique la tangente à la courbe à l'abscisse 0.

► Exercice 2 — Étude d'une suite définie à l'aide d'une fonction.

Soit f la fonction définie pour tout réel x différent de 3 par

$$f(x) = \frac{7x-3}{3+x}$$

1. On admet que f est dérivable sur chaque intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x différent de -3
2. En déduire que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On considère désormais la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{7u_n - 3}{3+u_n}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
2. D'après la question précédente, quel est le sens de variations de la suite (u_n) ?
3. On cherche désormais les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) serait constante.
   (a) Justifier que cela revient à résoudre l'équation $x = \dfrac{7x-3}{3+x}$
   (b) Résoudre cette équation et conclure.

► Exercice 3 — Conjecturer le terme général d'une suite.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n et démontrer cette conjecture par récurrence.