# DM4 : Limites de suites

**► Exercice 1 — Extrait de Centres étrangers 2022.**
On considère les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ définies apar

$$\begin{cases} a_0 = 0{,}1 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad \begin{cases} a_{n+1} = e^{-b_n} \\ b_{n+1} = e^{-a_n} \end{cases}$$

On a $a_1 = \mathrm{e}^{-b_0} = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \simeq 0.37$ et $b_1 = \mathrm{e}^{-a_0} = \mathrm{e}^{-0{,}1} \simeq 0.90$

Pour tout entier naturel $n$, on pose $P(n)$ : « $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$ »

- Initialisation : D'une part, puisque $10 \geqslant \mathrm{e}$, en appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a que $\dfrac{1}{10} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, c'est-à-dire $a_0 \leqslant a_1$.
  Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ étant croissante sur $\mathbb{R}$. On a donc que $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-0{,}1} \leqslant \mathrm{e}^0$, c'est-à-dire $a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$.
  Finalement, on a bien que $0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0 \leqslant 1$. $P(0)$ est donc vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}$, on a alors
  $$\mathrm{e}^0 > \mathrm{e}^{-a_n} \geqslant \mathrm{e}^{-a_{n+1}} \geqslant \mathrm{e}^{-b_{n+1}} \geqslant \mathrm{e}^{-b_n} \geqslant \mathrm{e}^{-1}$$
  Et donc, puisque $\mathrm{e}^{-1} > 0$, on a, en lisant cette inégalité dans l'autre sens,
  $$0 < a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1} \leqslant 1$$
  $P(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : $P(0)$ est vraie et $P$ est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

La suite $(a_n)$ est donc croissante et majorée par 1 et la suite $(b_n)$ est décroissante et minorée par 0. Les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont donc convergentes.

**► Exercice 2 — Amérique du Sud, Septembre 2022.**
La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.

Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10% chaque année. Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.

On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite $(u_n)$ où $u_n$ représente l'effectif de la population au début de l'année $2020 + n$.

On admet que pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant 0$.

Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2000$.

1. On rappelle que diminuer de 10% revient à multiplier par $1 - \dfrac{10}{100}$, soit $0{,}9$. Ainsi, pour tout entier naturel $n$

$$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 100.$$

2. $u_1 = 0{,}9 \times 2000 + 100 = 1900$, $u_2 = 0{,}9 \times 1900 + 100 = 1810$
3. Pour tout entier naturel $n$, on pose $P(n)$ : « $1000 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ »
   - Initialisation : $u_0 = 2000$ et $u_1 = 1900$. On a bien $1000 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. supposons $P(n)$ vraie. On a alors

     $$1000 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

     En multipliant par 0.9, on obtient

     $$0{,}9 \times 1000 \leqslant 0{,}9u_{n+1} \leqslant 0{,}9u_n$$

     puis en ajoutant 100

     $$0{,}9 \times 1000 + 100 \leqslant 0{,}9u_{n+1} + 100 \leqslant 0{,}9u_n + 100$$

     soit

     $$100 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$

     $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Conclusion : $P(0)$ est vraie et $P$ est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.
4. La suite $(u_n)$ est décroissante et minorée par 1000, elle est donc convergente.
5. On considère la suite $(a_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $a_n = u_n - 1000$.
   (a) Pour tout entier naturel $n$

   $$\begin{aligned} a_{n+1} &= u_{n+1} - 1000 \\ &= 0{,}9u_n + 100 - 1000 \\ &= 0{,}9u_n - 900 \\ &= 0{,}9(a_n + 1000) - 900 \\ &= 0{,}9a_n + 900 - 900 \\ &= 0{,}9a_n \end{aligned}$$

   (b) La suite $(a_n)$ est donc géométrique, de raison 0,9 et de premier terme $a_0 = u_0 - 1000 = 2000 - 1000 = 1000$. Ainsi, pour tout entier naturel $n$

   $$a_n = 1000 \times 0{,}9^n$$

   et

   $$u_n = a_n + 1000 = 1000 \times 0{,}9^n + 1000 = 1000(1 + 0{,}9^n)$$

   (c) Puisque $-1 < 0{,}9 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1000$. Si l'on avance beaucoup dans le temps, la population sera très proche de 1000 habitants.

**► Exercice 3 — Extrait de Polynésie, Septembre 2022.**

Soit $(u_n)$ une suite telle que pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Par ailleurs, il est évident que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, la suite $(u_n)$ converge et sa limite vaut 0.