DM4 : Limites de suites

► Exercice 1 — Extrait de Centres étrangers 2022.

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies apar

$$\begin{cases} a_0 = 0{,}1 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad \begin{cases} a_{n+1} = e^{-b_n} \\ b_{n+1} = e^{-a_n} \end{cases}$$

1. Calculer a_1 et b_1. On donnera un résultat arrondi à 10^{-2} près.
2. On rappelle que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
   $$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$$
   (b) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent. On ne demande par leur limite.

► Exercice 2 — Amérique du Sud, Septembre 2022.

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.

Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10% chaque année. Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.

On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020 + n$.

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.

Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :
   $$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 100.$$
2. Calculer u_1 puis u_2.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $1000 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.
5. On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par $a_n = u_n - 1000$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}9a_n$. On exprimera pour cela a_{n+1} en fonction de u_{n+1}, puis de u_n et enfin de a_n.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 1000(1 + 0{,}9^n)$
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n). En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.

► Exercice 3 — Extrait de Polynésie, Septembre 2022.

Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.