DM5 : Limites de suites

► Exercice 1 — Asie 2016.

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20% en un jour.

La société met en place le dispositif industriel suivant. Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.

L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$u_0 = 1000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100$

1. (a) En un jour, la population augmente de 20%, ce qui revient à la multiplier par 1,2. Il faut alors retirer les 100 grammes perdues lors du changement de milieu nutritif. u_n représente la masse de bactéries, en g, après n jours de culture.
   (b) On a $u_{22} \simeq 28000$ et $u_{23} \simeq 33000$. Il faut attendre 23 jours pour avoir 30 kg de bactéries.
   (c)
```python
def seuil() :
  u = 1000
  n = 0
  while u < 30000 :
    u = 1.2 * u - 100
    n = n + 1
  return n
```
2. (a) Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n > 500$ ».
   - Initialisation : $u_0 = 1000$, $P(0)$ est vraie.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a alors $u_n > 500$ et donc $1{,}2u_n > 1{,}2 \times 500$ puis $1{,}2u_n - 100 > 1{,}2 \times 500 - 100$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 500$. $P(n+1)$ est vraie.
   - $P(0)$ est vraie et P est héréditaire : pour tout entier naturel n, $P(n)$ est donc vraie.

   (b) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 1{,}2u_n - 100 - u_n = 0{,}2u_n - 100$.
   Or, $u_n > 500$ et donc $0{,}2u_n > 100$ puis $0{,}2u_n - 100 > 0$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est strictement croissante. Ceci ne permet pas de conclure sur la convergence de la suite : on ne sait pas si cette suite est majorée ou non.
3. On définit la suite (a_n) par : pour tout entier naturel n, $a_n = u_n - 500$.
   (a) Pour tout entier naturel n,
   $$\begin{aligned} a_{n+1} &= u_{n+1} - 500 \\ &= 1{,}2u_n - 100 - 500 \\ &= 1{,}2u_n - 600 \\ &= 1{,}2(a_n + 500) - 600 \\ &= 1{,}2a_n \end{aligned}$$
   (b) Pour tout entier naturel n, $a_n = a_0 \times 1{,}2^n = 500 \times 1{,}2^n$ et donc $u_n = 500 + 500 \times 1{,}2^n$.

(c) Puisque $1{,}2 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1{,}2)^n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4. Le modèle proposé n'est pas correct. Puisque u_n tend vers $+\infty$, alors il dépassera forcément 50 000 à partir d'un certain rang.

► Exercice 2 — Nouvelle-Calédonie 2015 – Extrait.

On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340$$

1. Soit n supérieur ou égal à 3
$$2n^2 - (n+1)^2 = 2n^2 - (n^2+2n+1) = n^2 - 2n - 1$$
Il s'agit d'un polynôme du second degré dont les racines sont $\sqrt{2}+1$ et $\sqrt{2}-1$. En particulier, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à $\sqrt{2}+1$, $n^2-2n-1 \geqslant 0$ (faire le tableau de signe si besoin) et donc $2n^2-(n+1)^2 \geqslant 0$ c'est-à-dire $2n^2 \geqslant (n+1)^2$. Le premier entier supérieur à $\sqrt{2}+1$ étant 3, on obtient bien ce que l'énoncé demandait.
2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on pose $P(n)$: « $2^n \geqslant n^2$ ».
   - Initialisation : Pour $n=4$, $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$. On a bien $2^4 \geqslant 4^2$. $P(4)$ est vraie.
   - Hérédité : Soit n un entier supérieur ou égal à 4 tel que $P(n)$ est vraie. On a alors $2^n \geqslant n^2$ En multipliant par 2, on obtient
   $$2^{n+1} \geqslant 2n^2$$
   Or, d'après la question précédente, puisque n est supérieur ou égal à 4, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$. Finalement
   $$2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$$
   $P(n+1)$ est vraie.
   - $P(4)$ est vraie et P est héréditaire : pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, $P(n)$ est donc vraie.
3. Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $2^n \geqslant n^2$. En appliquant la fonction inverse (décroissante sur $]0;+\infty[$), on obtient
$$\frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n^2}$$
En multipliant alors par $100n$, et en constatant que la quantité de gauche est évidemment positive, on a alors , pour tout entier naturel supérieur ou égal à 4,
$$0 \geqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant \frac{100}{n}$$
4. Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 4,
$$0 \geqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant \frac{100}{n}$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{100}{n} = 0$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ existe et vaut 0. Par ailleurs, puisque $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 340$.