DM5 : Limites de suites

▶ Exercice 1 — Asie 2016.
Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20% en un jour.

La société met en place le dispositif industriel suivant. Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.

L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$u_0 = 1000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100$

1. (a) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé. On précisera en particulier ce que représente u_n.
   (b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
   (c) Écrire un algorithme en Python qui répond à la question précédente;
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 500$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante. Peut-on en déduire la convergence de la suite (u_n) ?
3. On définit la suite (a_n) par : pour tout entier naturel n, $a_n = u_n - 500$.
   (a) Démontrer que la suite (a_n) est une suite géométrique.
   (b) Exprimer a_n, puis u_n, en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Le modèle proposé précédemment est-il correct ?

▶ Exercice 2 — Nouvelle-Calédonie 2015 – Extrait.
On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340$$

1. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$
2. Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a $2^n \geqslant n^2$
3. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a $0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}$.
4. Étudier la convergence de la suite (a_n).