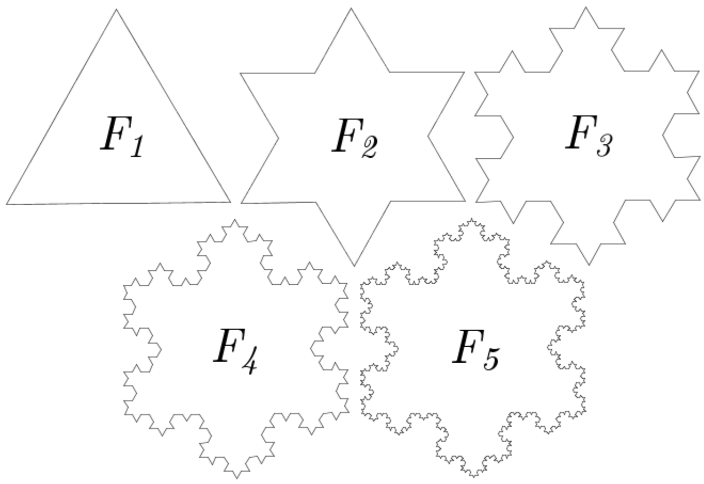
DM6 : Pour passer de bonnes vacances

► **Exercice 1 — Flocon de Koch.**

Le flocon de Koch est une figure géométrique obtenue par le procédé de construction suivant :

- On part d'un triangle équilatéral de côté 1.
- A chaque étape
  - On divise chaque côté de la figure en 3 parties égales ;
  - On construit un triangle équilatéral sur la partie du milieu, en l'orientant vers l'extérieur de la figure ;
  - On supprime le côté qui a servi de base

On a tracé ci-dessous les 5 premières itérations de cette construction. On note F_n la figure obtenue après n étape. La première figure est appelée F_1.



1. Pour tout entier naturel n, on note S_n le nombre de côté de la figure après n étapes.
   (a) On a $S_1 = 3$, $S_2 = 12$ et $S_3 = 36$
   (b) A chaque étape, on remplace chaque côté par 4 segments. Le nombre total de côté est donc multiplié par 4.
   (c) Pour tout entier naturel n, $S_n = 3 \times 4^{n-1}$ (attention, on commence au rang 1). Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.
   (d) La figure à l'étape n compte plus de 5000 côtés si $3 \times 4^{n-1} \leqslant 5000$, c'est-à-dire dès que $n \geqslant 7$.
2. Pour tout entier naturel n, on note P_n le périmètre de la figure après n étapes.
   (a) A chaque étape, la longueur des côtés est divisée par 3. A l'étape 1, cette longueur vaut 1. La longueur d'un côté à l'étape n vaut donc $\left(\frac{1}{3}\right) n - 1$. Par ailleurs, il faut multiplier cette longueur par le nombre de côtés pour obtenir le périmètre de la figure. Le périmètre vaut alors $P_n = S_n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

(b) Ainsi, pour tout entier naturel non nul n,

$$P_n = S_n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3 \times 4^{n-1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Puisque $\frac{4}{3} > 1$, il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = +\infty$.

3. Pour tout entier naturel n, on note A_n l'aire de la figure après n étapes.

(a) Il est facile de démontrer que l'aire d'un triangle équilatéral de côté a vaut $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$: En utilisant le théorème de Pythagore, on montre que la hauteur d'un tel triangle a pour hauteur $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, et la formule de l'aire d'un triangle nous permet de conclure.

Or, F_1 est un triangle équilatéral de côté 1 : son aire vaut donc bien $\frac{\sqrt{3}}{4}$
Par ailleurs, pour passer de F_1 à F_2, on ajoute 3 triangles équilatéraux de côté 1/3. L'aire de chaque triangle vaut donc $\frac{\sqrt{3}}{36}$. Puisqu'il y en a 3, on a donc $A_2 - A_1 = 3\frac{\sqrt{3}}{36}$ et donc

$$A_2 = A_1 + \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}$$

(b) Pour $n \geqslant 2$, on reprend le raisonnement précédent : pour passer de A_{n-1} à A_n on doit ajouter l'aire des triangles équilatéraux. Ces triangles sont au nombre de $3 \times 4^{n-2}$ (il y en a autant que de côtés sur la figure). Leur côté de longueur $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ et leur aire vaut donc $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)^2$. L'aire ajoutée vaut donc

$$3 \times 4^{n-2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9^{n-1}} = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}$$

Alors, pour tout entier naturel n, on a

$$A_n = A_0 + (A_1 - A_0) + (A_2 - A_1) + \cdots + (A_n - A_{n-1}$$

et donc

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\right)$$

(c) On rappelle que pour tout réel q différent de 0 et 1 et tout entier naturel n,
Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} = \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{9}}$$

Puisque $-1 < \dfrac{4}{9} < 1$, cette quantité tend vers $\dfrac{1}{1-\dfrac{4}{9}}$, soit $\dfrac{9}{5}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{8}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

► Exercice 2

On considère les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, appelées cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique

$$ch : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad sh : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Partie A : Étude des fonctions

1. On a $sh(0) = dfrace^0 - e^{-0}2 = \dfrac{1-1}{2} = 0$ et $ch(0) = dfrace^0 + e^{-0}2 = \dfrac{1+1}{2} = 1$
2. Pour tout réel x, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$. Il en vient que $e^x + e^{-x} > 0$ et donc que $ch(x) > 0$.
3. sh est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout réel x,

$$sh'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x)$$

4. On a vu que pour tout réel x, $ch(x) > 0$. Ainsi, sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, $sh(0) = 0$. Il en vient le tableau de variations et de signe suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$sh'(x)$		$+$		$+$	
sh			$\nearrow$		
$sh(x)$		$-$	0	$+$	

5. ch est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout réel x,

$$ch'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x)$$

6. D'après les questions précédentes, on a le tableau de signes de sh, qui est la dérivée de ch. On peut en déduire le tableau de variations de ch.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch'(x)$		$-$	0	$+$	
ch		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Partie B : Propriétés particulières

1. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} ch(x)^2 - sh(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(e^x)^2 + 2e^xe^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2e^xe^{-x} + (e^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Pour tous réels a et b,

$$\begin{aligned} ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b) &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} \times \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2} \times \frac{e^b - e^{-b}}{2} \\ &= \frac{1}{4}(e^ae^b + e^ae^{-b} + e^{-a}e^b + e^{-a}e^{-b} + e^ae^b - e^ae^{-b} - e^{-a}e^b + e^{-a}e^{-b}) \\ &= \frac{1}{4}(2e^{a+b} + 2e^{-(a+b)}) \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} \\ &= ch(a+b) \end{aligned}$$

3. Pour tous réels a et b,

$$\begin{aligned} sh(a)ch(b) + ch(a)sh(b) &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} \times \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a + e^{-a}}{2} \times \frac{e^b - e^{-b}}{2} \\ &= \frac{1}{4}(e^ae^b + e^ae^{-b} - e^{-a}e^b - e^{-a}e^{-b} + e^ae^b - e^ae^{-b} + e^{-a}e^b - e^{-a}e^{-b}) \\ &= \frac{1}{4}(2e^{a+b} - 2e^{-(a+b)}) \\ &= \frac{e^{a+b} - e^{-(a+b)}}{2} \\ &= sh(a+b) \end{aligned}$$

4. Pour tout entier naturel n, On considère la proposition $P(n)$: « pour tout réel x, $(ch(x) + sh(x))^n = ch(nx) + sh(nx)$.
   - Initialisation : pour $n = 0$, on a, pour tout réel x,

     $$(ch(x) + sh(x))^0 = (e^x)^0 = e^0 = 1$$

     et

     $$ch(0x) + sh(0x) = ch(0) + sh(0) = 1 + 0 = 1$$

     $P(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors, pour tout réel x,

     $$(ch(x) + sh(x))^{n+1} = (ch(x) + sh(x))^n \times (ch(x) + sh(x))$$

Par hypothèse de récurrence, on a donc, pour tout réel x,

$$(ch(x) + sh(x))^{n+1} = (ch(nx) + sh(nx)) \times (ch(x) + sh(x))$$

En développant, on a alors, pour tout réel x,

$$(ch(x) + sh(x))^{n+1} = ch(nx)ch(x) + ch(nx)sh(x) + sh(nx)ch(x) + sh(nx)sh(x)$$

Or, d'après les questions précédentes,

$$ch(nx)ch(x) + sh(nx)sh(x) = ch(nx + x) = ch((n + 1)x)$$

et

$$sh(nx)ch(x) + ch(nx)sh(x) = sh(nx + x) = sh((n + 1)x)$$

Ainsi, pour tout réel x,

$$(ch(x) + sh(x))^{n+1} = (ch((n + 1)x) + sh((n + 1)x))$$

$P(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion : D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Exercice 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$, définie sur $]0; +\infty[$.

1. Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ ne s'annule pas sur cet intervalle. Ainsi, f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{e^x \times \sqrt{x} - e^x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} = \frac{1}{x} \times \frac{e^x\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} - e^x}{2\sqrt{x}} = \frac{(2x - 1)e^x}{2x\sqrt{x}}$$

2. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $(2x - 1)$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\sqrt{2e}$	$\nearrow$	

On considère désormais la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

On peut remarquer que pour tout réel x, $g(x) = f(x^2 + x + 1)$.

3. La fonction $u : x \mapsto x^2 + x + 1$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout réel x, $x^2 + x + 1 > 0$ (on calcule le discriminant du polynôme $x^2 + x + 1$, qui est négatif). Ainsi, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = u'(x) \times f(u(x)) = (2x+1) \times \frac{(2(x^2+x+1)-1)e^{x^2+x+1}}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

et donc

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(2x^2+2x+1)e^{x^2+x+1}}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

4. $g'(x)$ est du signe de $(2x+1)$ (on vérifie que pour tout réel x, $2x^2+2x+1>0$ à l'aide du discriminant par exemple).

x	0		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	