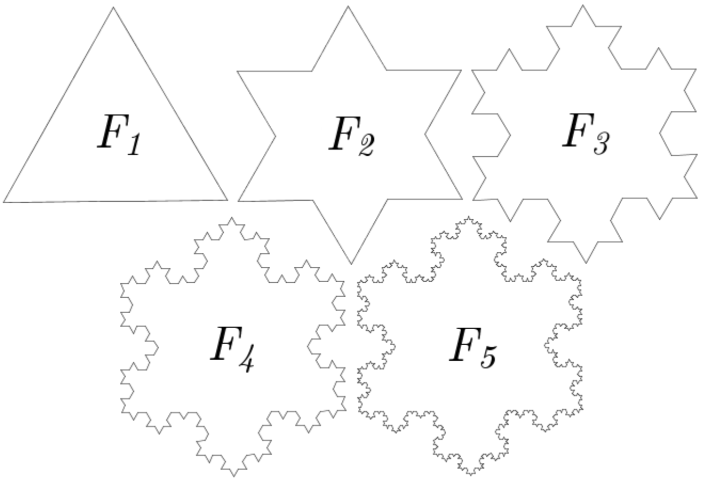
DM6 : Pour passer de bonnes vacances

► Exercice 1 — Flocon de Koch.

Le flocon de Koch est une figure géométrique obtenue par le procédé de construction suivant :

- On part d'un triangle équilatéral de côté 1.
- A chaque étape
  - On divise chaque côté de la figure en 3 parties égales ;
  - On construit un triangle équilatéral sur la partie du milieu, en l'orientant vers l'extérieur de la figure ;
  - On supprime le côté qui a servi de base

On a tracé ci-dessous les 5 premières itérations de cette construction. On note F_n la figure obtenue après n étape. La première figure est appelée F_1.



1. Pour tout entier naturel n, on note S_n le nombre de côté de la figure après n étapes.
   (a) Que valent S_1, S_2 et S_3 ?
   (b) Justifier que pour tout entier naturel n, $S_{n+1} = 4S_n$.
   (c) Exprimer S_n en fonction de n pour tout entier naturel n. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$?
   (d) A partir de quelle étape la figure comporte-t-elle plus de 5000 côtés ?
2. Pour tout entier naturel n, on note P_n le périmètre de la figure après n étapes.
   (a) Justifier que pour tout entier naturel n, $P_n = S_n \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.
3. Pour tout entier naturel n, on note A_n l'aire de la figure après n étapes.
   (a) Montrer que $A_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ et $A_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{12}$
   (b) Justifier que pour tout $n > 0$, $A_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{12} \times \left(1 + \dfrac{4}{9} + \left(\dfrac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-2}\right)$.
   (c) On rappelle que pour tout réel q différent de 0 et 1 et tout entier naturel n,
   $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

► Exercice 2

On considère les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, appelées cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique

$$ch : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad\qquad sh : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Partie A : Étude des fonctions

1. Calculer $ch(0)$ et $sh(0)$
2. Justifier que pour tout réel x, $ch(x) > 0$
3. Justifier que sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel x, $sh'(x) = ch(x)$
4. En déduire le tableau de variations et de signe de sh sur $\mathbb{R}$.
5. Justifier que ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $ch'(x) = sh(x)$.
6. En déduire le tableau de variations de ch sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Propriétés particulières

1. Montrer que pour tout réel x, $ch(x)^2 - sh(x)^2 = 1$
2. Montrer que pour tous réels a et b,
$$ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b) = ch(a + b)$$
3. Montrer que pour tous réels a et b,
$$sh(a)ch(b) + ch(a)sh(b) = sh(a + b)$$
4. En utilisant les deux questions précédentes, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, pour tout réel x,
$$(ch(x) + sh(x))^n = ch(nx) + sh(nx)$$

► Exercice 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$, définie sur $]0; +\infty[$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que pour tout réel $x > 0$
$$f'(x) = \frac{(2x - 1)e^x}{2x\sqrt{x}}$$
2. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

On considère désormais la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

On peut remarquer que pour tout réel x, $g(x) = f(x^2 + x + 1)$.

3. Justifier que g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,
$$g'(x) = \frac{(2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)e^{x^2+x+1}}{2(x^2 + x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$$
Indication : ne pas utiliser la dérivée d'un quotient vous épargnera de longs et pénibles calculs.
4. Construire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.