DM 7 : Fonctions, géométrie

▶ Exercice 1

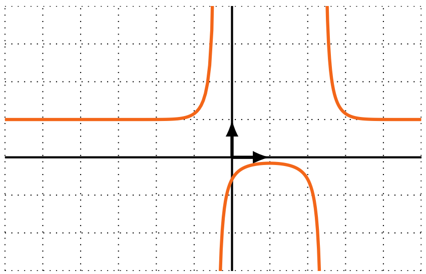
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-e^{-x^2+2x+1}}$

1. f est définie si et seulement si $1 - e^{-x^2+2x+1} \neq 0$, c'est-à-dire $-x^2+2x+1 \neq 0$. La résolution de cette équation donne que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$.
2. f est dérivable car c'est l'inverse d'une fonction dérivable et qui ne s'annule pas sur D. Pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{(-2x+2)e^{-x^2+2x+1}}{(1-e^{-x^2+2x+1})^2}$$

3. Pour tout réel $x \in D$, $f'(x)$ est du signe de $-2x+2$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
f		↗	‖	↗		↘	‖	↘	

4. 

▶ Exercice 2

Dans un repère quelconque $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1;2;-1)$, $B(3;5;-4)$ ainsi que la droite (d) de représentation paramétrique

$$(d) \quad : \quad \begin{cases} x = 3-6t \\ y = 5-9t \\ z = -8+5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. Le point $C(3;5;-8)$ appartient à (d). En prenant $t=1$, on trouve que le point $D(-3;-4;-3)$ appartient à la droite (d). Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).
2. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires, les droites (AB) et (d) ne sont donc pas parallèles.
3. On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$. Soit λ et μ deux réels. On a

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2\lambda - 4\mu \\ 3 = 3\lambda - 6\mu \\ -3 = -7\lambda - 2\mu \end{cases}$$

Les lignes 1 et 2 sont en fait les deux mêmes (la deuxième est égale à 1.5 fois la deuxième). Il est donc possible de n'en garder qu'une seule sur les deux. Remplaçons alors la ligne 3 par $2L_3 - L - 1$. On obtient

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2\lambda - 4\mu \\ -8 = -16\lambda \end{cases}$$

et donc

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2 \times \dfrac{1}{2} - 4\mu \\ \lambda = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Finalement,

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\dfrac{1}{4} \\ \lambda = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

4. Les points A, B, C et D sont donc coplanaires. Les droites (AB) et (d) sont donc coplanaires. Puisqu'elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes.

5. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

6. On cherche à résoudre la système

$$\begin{cases} 3 - 6t = 1 + 2t' \\ 5 - 9t = 2 + 3t' \\ -8 + 5t = -1 - 3t' \end{cases}$$

On remplaçant L_3 par $L_3 + L_2$, on obtient

$$\begin{cases} 3 - 6t = 1 + 2t' \\ 5 - 9t = 2 + 3t' \\ -3 - 4t = 1 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} 3 - 6t = 1 + 2t' \\ 5 - 9t = 2 + 3t' \\ t = -1 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} 3-6=1+2t' \\ 5-9=2+3t' \\ t=-1 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} t'=-2 \\ 5-9=2+3\times(-2)(\text{ vrai}) \\ t=-1 \end{cases}$$

Ainsi, en prenant $t=-1$ dans l'équation de (d) ou en prenant $t'=-2$ dans l'équation de (AB), on trouve le point de coordonnées $(9{,}14{,}-13)$: il s'agit du point d'intersection de ces deux droites.