Devoir Surveillé 2

► Exercice 1

Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4-2n^3+1}{2-3n^3} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+2\cos(n)}{n+1}$$

> Pour ce type d'exercices, prenez garde à ne pas utiliser le terme de limite immédiatement.
> - D'abord, on peut constater que les règles d'opérations sur les limites ne nous permettent pas de conclure directement sur les limites de ces suites. Attention, on ne dit pas que « la limite est une forme indéterminée » ! La limite (si elle existe), est un réel ou $\pm\infty$, elle ne change pas selon la façon d'écrire ma suite.
> - Ensuite, on transforme l'écriture de la suite ou on l'encadre pour faire apparaître des termes dont on sait déterminer s'ils ont une limite et laquelle
> - On conclut alors. Ce n'est qu'à ce moment que l'on utilise la limite : lorsque l'on s'est assuré qu'elle existe bel et bien.

Pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{n^4-2n^3+1}{2-3n^3} = \dfrac{n^4}{n^3} \times \dfrac{1-\frac{2n^3}{n^4}+\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^3}-3} = n \times \dfrac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^3}-3}$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^4}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{n^3}-3\right) = -3$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^4-2n^3+1}{2-3n^3} = -\infty$

> Ne pas oublier d'appliquer la règle des signes. Enfin, prendre garde à la factorisation : lorsque l'on factoriser par n^4 dans n^4-2n^3+1, il ne faut pas oublier qu'il y a un 1 en coefficient du terme n^4.

Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \geqslant 1$, d'où $-2 \leqslant 2\cos(n) \geqslant 2$ et $3n-2 \leqslant 3n+2\cos(n) \geqslant 3n+2$. Finalement, $\dfrac{3n-2}{n+1} \leqslant \dfrac{3n+2\cos(n)}{n+1} \leqslant \dfrac{3n+2}{n+1}$.

Or, pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{3n-2}{n+1} = \dfrac{n}{n} \times \dfrac{3-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{3-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 3$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+2}{n+1} = 3$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+2\cos(n)}{n+1}$ existe et vaut 3.

► Exercice 2 — Inspiré de Centres étrangers 2021 – Sujet 1.

Partie A

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.

Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85% de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n). Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

1. Diminuer une quantité de 15% revient à la multiplier par $1-\dfrac{15}{100}$, soit 0.85. Ainsi, pour passer a_n à a_{n+1}, on multiplie par 0.85 et on ajoute 450, ce qui correspond au nombre de nouveaux collaborateurs choisissant le télétravail.
2. On a $a_1 = 0.85 \times a_0 + 450 = 620$ et $a_2 = 0.85 \times 620 + 450 = 977$. D'après ce modèle, 620 personnes seront en télétravail en juin 2020. Elles seront 977 en juillet 2020.

> Attention à bien répondre à la question : le calcul de a_1 et a_2 ne suffit pas !

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 3000$
   (a) Pour tout entier naturel n,
   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - 3000 \\ &= 0{,}85a_n + 450 - 3000 \\ &= 0{,}85a_n - 2550 \\ &= 0{,}85(v_n + 3000) - 2550 \\ &= 0{,}85v_n + 2550 - 2550 \\ &= 0{,}85v_n \end{aligned}$$
   Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}85$. Par ailleurs, $v_0 = a_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$.

   > Attention à ne pas oublier les parenthèses lorsque l'on remplace a_n par $v_n + 3000$.

   (b) Pour tout entier naturel n, $v_n = -2800 \times 0{,}85^n$.
   (c) Pour tout entier naturel n, $a_n = v_n + 3000 = -2800 \times 0{,}85^n + 3000$.
   (d) Puisque $-1 < 0{,}85 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}85^n = 0$ et il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 3000$. Au bout d'un certain temps, le nombre de collaborateurs en télétravail sera proche de 3000.

   > Dans les hypothèses donnant les limites de la suite (q^n), les inégalités sont strictes ! Il faut donc justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}85^n = 0$ en utilisant des inégalités strictes. Par ailleurs, le rang n n'intervient pas lorsque l'on précise cette inégalité (pas de $-1 < 0{,}85^n < 1$).
   > Ne pas oublier encore une fois de répondre à la question : il fallait revenir au contexte du problème, sans pour autant surinterpréter. Si la limite vaut 3000, cela signifie que pour n grand, a_n est proche de 3000. Dire que a_n ne dépasse pas 3000, c'est simplement dire que la suite n'est pas majorée par 3000.

4. On a écrit l'algorithme suivant dans le langage Python

```python
def seuil(S):
  n = 0
  a = 200
  while a < S :
    a = 0.85 * a + 450
    n = n + 1
  return n
```

   (a) L'instruction seuil(2500) a renvoyé la valeur 11. Cela signifie qu'à partir du 11ème mois, il y aura plus de 2500 collaborateurs en télétravail.
   (b) La suite (a_n) est croissante et tend vers 3000. Elle est donc majorée par 3000 et ne peut pas atteindre la valeur de 4000. L'instruction seuil(4000) engendrera une boucle infinie.

Partie B

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. La fonction f définie pour tout $x \geqslant 0$ par

$$f(x) = \frac{5x + 4}{x + 2}$$

est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ (c'est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle).
Par ailleurs, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = \frac{5(x+2) - 1(5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{5x + 10 - (5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$$

Ainsi, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x) > 0$, la fonction f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

> Ce n'est pas parce que la consigne n'indique pas clairement de dériver la fonction f qu'il est interdit de le faire ! Toutes les étapes de l'étude d'une fonction ne figureront pas toujours dans la consigne, mais il faut avoir le réflexe de penser à la dérivation lorsque l'on souhaite étudier les variations d'une fonction.
> Attention par ailleurs : c'est bien le signe de la dérivée que l'on étudie ! L'étude du signe de f ne nous apporte strictement rien sur ses variations.
> Enfin, toute récurrence est à prohiber : x est un paramètre réel et non un entier.

2. (a) Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ »
   - Initialisation : On a $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{5+4}{1+2} = 3$. On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$. $P(0)$ est donc vraie.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. En appliquant la fonction f, qui est croissante sur $[0; +\infty[$, à cette égalité, on obtient donc $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$.
     Or, $f(0) = \dfrac{4}{2} = 2 \geqslant 0$ et $f(4) = \dfrac{5 \times 4 + 4}{4 + 2} = \dfrac{24}{6} = 4$. Par ailleurs, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$.
     Finalement, on trouve que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   > La récurrence est une démonstration où l'on connaît le résultat avant de le démontrer. Il faut donc ne laisser aucun doute sur le fait que vous avez bien effectué votre raisonnement, et que vous n'êtes pas simplement passé de la première étape à la dernière simplement parce que vous saviez que cette étape était votre but final. Par exemple, montrez que vous avez bel et bien calculé u_1 avant d'assurer que $P(0)$ est vraie.
   > Notez que cette question vient juste après l'étude d'une fonction que l'on a trouvé croissante et qui intervient de manière assez évidente dans la définition de notre suite : cette information ne doit pas vous échapper ! Il vous faut utiliser la fonction f !
   > D'une manière générale, ne perdez pas de vue que les questions d'un exercice interviennent dans un certain ordre et que, par conséquent, il est préférable de vérifier si les résultats des questions précédentes ne pourraient pas nous être utiles. Si vous arrivez à la fin d'un exercice sans avoir jamais utilisé le résultat de la première question ailleurs, il se peut qu'il y ait un souci quelque part.

   (b) D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 4. Il en vient que la suite (u_n) est convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On a donc, pour tout entier naturel n, $-4 \leqslant -u_n \leqslant -4+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et donc $4 \geqslant u_n \geqslant 4-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Or, puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 4$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 = 4$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$. Cela signifie qu'à terme, le nombre de collaborateurs satisfaits sera proche de 4000.

> Il est possible d'utiliser directement le théorème d'encadrement et d'en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}(4-u_n) = 0$. Mais attention, il s'agit là de $4-u_n$ et pas de u_n ! Il faut alors utiliser les règles sur le calcul des limites (sachant que l'on a montré que la suite (u_n) convergeait dans la question précédente.

► Exercice 3 — Métropole 2021.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$$

1. On a

$$u_1 = u_{0+1} = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4}\times 0 + 1 = \frac{3}{4} + 0 + 1 = \frac{7}{4}$$

et

$$u_2 = u_{1+1} = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4}\times 1 + 1 = \frac{3}{4}\times\frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{41}{16}$$

> Il ne faut pas se tromper en remplaçant la valeur de n lors de ce calcul. Par ailleurs, la consigne demande de mettre la réponse sous forme d'une fraction irréductible. Ne trouver que des valeurs entières à cette question peut vous mettre la puce à l'oreille.

2. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ »
   - Initialisation : On a $u_0 = 1$. On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 0+1$. $P(0)$ est donc vraie.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

     En multipliant par $\frac{3}{4}$, on obtient

     $$\frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1)$$

     On ajouter alors $\frac{1}{4}n+1$ et on obtient

     $$\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n + 1$$

     c'est-à-dire,

     $$n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4}$$

     Et puisque $\frac{7}{4} \leqslant 2$, on obtient bien

     $$n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$$

     $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

> Lorsque l'on multiplie l'inégalité par $\frac{3}{4}$, il ne faut pas oublier les parenthèses sur le facteur $n+1$. Il faut mener vos calculs consciencieusement, sans essayer d'arnaquer le correcteur pour à tout prix retomber sur la bonne forme à la fin de la récurrence.

3. Pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1}$ et donc, en particulier, $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante. Par ailleurs, pour tout entier naturel n, $n \leqslant u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
4. Pour tout entier naturel non nul n, on a $n \leqslant u_n \leqslant n+1$. On peut alors diviser cette inégalité par n, et on obtient $\dfrac{n}{n} \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{n+1}{n}$, c'est-à-dire $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant 1+\dfrac{1}{n}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$ existe et vaut 1.

> Il ne faut pas perdre de vue les questions précédemment traitées. Si vous ne voyez pas par quel bout attaquer une question, regardez dans ce que vous avez montré précédemment, vous y trouverez peut-être une indication.