Devoir Surveillé 2

► Exercice 1
Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4-2n^3+1}{2-3n^3} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+2\cos(n)}{n+1}$$

► Exercice 2 — Inspiré de Centres étrangers 2021 – Sujet 1.
Partie A

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.

Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85% de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n). Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 450$
2. Déterminer le nombre de collaborateurs en télétravail en juin 2020, puis en juillet 2020.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 3000$
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85. On précisera également son premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0{,}85^n + 3000$.
   (d) Déterminer la limite de la suite (a_n) en $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On a écrit l'algorithme suivant dans le langage Python

```python
def seuil(S):
  n = 0
  a = 200
  while a < S :
    a = 0.85 * a + 450
    n = n + 1
  return n
```

   (a) L'instruction seuil(2500) a renvoyé la valeur 11. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   (b) Que se passera-t-il si l'on exécute l'instruction seuil(4000) ?

Partie B

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Montrer que la fonction f définie pour tout $x \geqslant 0$ par

   $$f(x) = \frac{5x + 4}{x + 2}$$

   est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
2. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$

   (b) Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. On admet que pour tout entier naturel n,

   $$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

   En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

► Exercice 3 — Métropole 2021.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$$

1. Calculer u_1 et u_2. Les exprimer sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

   $$n \leqslant u_n \leqslant n + 1$$

3. En déduire le sens de variations de la suite (u_n) ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$