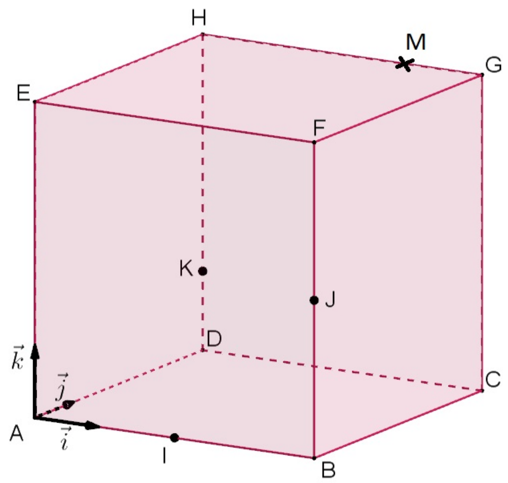
Devoir Surveillé 3

► Exercice 1

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 4. On considère les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ tels que $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$. L'espace est alors muni du repère $(A; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Dans ce repère, on a par exemple les coordonnées suivantes

$$A(0;0;0) \quad B(4;0;0) \quad C(4;4;0) \quad D(0;4;0) \quad H(0;4;4)$$



On considère par ailleurs les points I et J, milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BF]$, ainsi que le point K de coordonnées $(0;4;1)$.

1. On a $G(4{,}4{,}4)$, $J(4{,}0{,}2)$ et $I(2{,}0{,}0)$.
2. On a placé sur la figure le point M de coordonnées $(3;4;4)$.
3. La droite (JK) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}-4\\4\\-1\end{pmatrix}$. La droite (IM) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Les droites (JK) et (IM) ne sont donc pas parallèles.
4. On a $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$

   Soit λ et μ tels que $\overrightarrow{IM} = \lambda\overrightarrow{IJ} + \mu\overrightarrow{IK}$. On a alors

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda - 2\mu \\ 4 = 0\lambda + 4\mu \\ 4 = 2\lambda + \mu \end{cases}$$

La deuxième ligne donne directement que $\mu = 1$. En remplaçant μ par 1 dans l'une des deux autres lignes, on obtient que $\lambda = \frac{3}{2}$. Réciproquement, on vérifie qu'on a bien $\overrightarrow{IM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont coplanaires. Il en est de même pour les points I, J, K et M et donc pour les droites (IM) et (KJ). Ces droites n'étant pas parallèles, elles sont donc sécantes. Que peut-on en déduire sur les droites (JK) et (IM) ?

5. On considère la droite (d) de représentation paramétrique

$$(d) \quad : \quad \left\{\begin{array}{l} x = 4 - 4t \\ y = 4t \\ z = 2 - t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}$$

   (a) En prenant $t = 0$, on obtient le point de coordonnées $(4{,}0{,}2)$, soit le point J. En prenant $t = 1$, on obtient le point $(0{,}4{,}1)$, soit le point K. Il s'agit de la droite (JK).

   (b) La droite (IM) admet pour représentation paramétrique

$$(d) \quad : \quad \left\{\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 4t \\ z = 4t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}$$

   (c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (JK) et (IM) revient à trouver deux réels t et t' tels que

$$\left\{\begin{array}{l} 4 - 4t = 2 + t' \\ 4t = 4t' \\ 2 - t = 4t' \end{array}\right.$$

   La deuxième ligne donne immédiatement $t = t'$. En remplaçant t par t' dans la première ligne, on obtient $4 - 4t = 2 + t$ et donc $t = \frac{2}{5} = 0.4$. Réciproquement, en remplaçant t ou t' par 0.4 dans les équations correspondantes, on trouve le point de coordonnées $(2.4; 1.6; 1.6)$ comme point d'intersection des droites (IM) et (JK).

► Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-e^{3x-x^2}}$

1. f est définie si et seulement si $1-e^{3x-x^2} \neq 0$, c'est-à-dire $3x-x^2 \neq 0$. Or, $3x-x^2 = x(3-x)$, ce qui vaut 0 si et seulement si $x=0$ ou $x=3$. Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0;3\}$.
2. **Étude des limites**
   (a) On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-x^2) = -infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x-x^2} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{1}{1-0} = 1$.
   Par ailleurs, pour tout réel $x > 0$, $3x-x^2 = x^2\left(\dfrac{3}{x}-1\right)$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x}-1\right) = -1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-x^2) = -infty$. En faisant les mêmes opérations que précédemment, on trouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

   (b) On donne ci-dessous le tableau de signes de $1-e^{3x-x^2}$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$1-e^{3x-x^2}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   D'après ce tableau, on voit que $\lim\limits_{x\to0^-}(1-e^{3x-x^2}) = 0^+$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to0^-}(1-e^{3x-x^2}) = +\infty$. De même, on a $\lim\limits_{x\to0^+}(1-e^{3x-x^2}) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to3^-}(1-e^{3x-x^2}) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to3^+}(1-e^{3x-x^2}) = +\infty$.

   (c) Les droites d'équation $x=0$ et $x=3$ sont des asymptotes verticales à la courbe de f. La droite d'équation $y=1$ est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ à la courbe de f.
3. **Étude des variations**
   (a) f est l'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas, elle est donc dérivable. La dérivée de $x \mapsto e^{3x-x^2}$ est $x \mapsto (3-2x)e^{3x-x^2}$. Par ailleurs, si u est dérivable et ne s'annule pas, alors $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$. Il en vient que, pour tout réel $x \in \mathbb{D}$

$$f'(x) = -\frac{-(3-2x)e^{3x-x^2}}{(1-e^{3x-x^2})^2} = \frac{(3-2x)e^{3x-x^2}}{(1-e^{3x-x^2})^2}$$

   (b) Pour tout réel $x \in D$, $f'(x)$ est du signe de $3-2x$.

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
f	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\simeq -0.12$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

4. Pour tout réel x de D,

$$f(3-x) = \frac{1}{1-e^{3(3-x)-(3-x)^2}} = \frac{1}{1-e^{9-3x-(9-6x-x^2)}} = \frac{1}{1-e^{3x-x^2}} = f(x)$$

La courbe de f admet la droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$ comme axe de symétrie (On a en effet, $\dfrac{x+(3-x)}{2} = \dfrac{3}{2}$).

5. Tracer l'allure de la courbe de f dans le repère orthonormé suivant.