

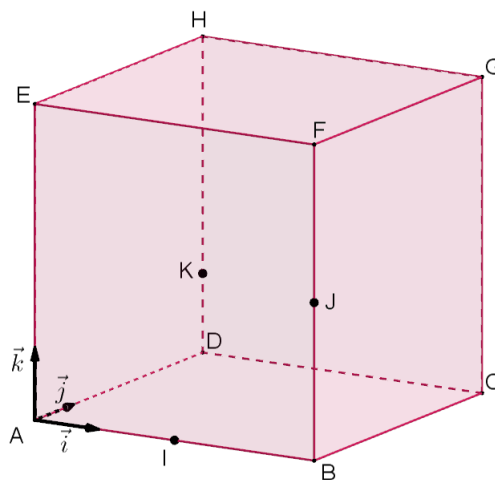
# Devoir Surveillé 3

## ► Exercice 1

On considère un cube  $ABCDEFGH$  d'arête de longueur 4. On considère les vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  tels que  $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$  et  $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ . L'espace est alors muni du repère  $(A; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Dans ce repère, on a par exemple les coordonnées suivantes

$$A(0; 0; 0) \quad B(4; 0; 0) \quad C(4; 4; 0) \quad D(0; 4; 0) \quad H(0; 4; 4)$$



On considère par ailleurs les points  $I$  et  $J$ , milieux respectifs des segments  $[AB]$  et  $[BF]$ , ainsi que le point  $K$  de coordonnées  $(0; 4; 1)$ .

1. Donner, sans les justifier, les coordonnées des points  $G$ ,  $J$  et  $I$ .
2. Placer sur la figure le point  $M$  de coordonnées  $(3; 4; 4)$ .
3. Les droites  $(JK)$  et  $(IM)$  sont-elles parallèles ? Justifier.
4. Trouver deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\overrightarrow{IM} = \lambda\overrightarrow{IJ} + \mu\overrightarrow{IK}$ . Que peut-on en déduire sur les droites  $(JK)$  et  $(IM)$  ?
5. On considère la droite  $(d)$  de représentation paramétrique

$$(d) : \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 4t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- (a) La droite  $(d)$  est-elle égale à la droite  $(IM)$  ou à la droite  $(JK)$  ? Justifier.
- (b) Donner une représentation paramétrique de l'autre droite.
- (c) A l'aide des questions précédentes, déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites  $(JK)$  et  $(IM)$ .

► **Exercice 2**

On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{1 - e^{3x-x^2}}$

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ . Ce domaine sera noté  $D$ .

2. **Étude des limites**

(a) Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

(b) On donne ci-dessous le tableau de signes de  $1 - e^{3x-x^2}$

$x$	$-\infty$	$0$	$3$	$+\infty$	
$1 - e^{3x-x^2}$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

En utilisant ce tableau, déterminer les limites de  $f$  et  $0^-$ ,  $0^+$ ,  $3^-$  et  $3^+$ .

(c) Déterminer les équations des asymptotes à la courbe représentative de  $f$ .

3. **Étude des variations**

(a) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $D$  et que pour tout réel  $x \in \mathbb{D}$

$$f'(x) = \frac{(3 - 2x)e^{3x-x^2}}{(1 - e^{3x-x^2})^2}$$

(b) Construire le tableau de signes de  $f'$  et en déduire le tableau de variations de  $f$ . On y inclura les limites et les extremums.

4. Montrer que pour tout réel  $x$  de  $D$ ,  $f(3 - x) = f(x)$ . En déduire que la courbe représentative de  $f$  admet un axe de symétrie dont on donnera l'équation.

5. Tracer l'allure de la courbe de  $f$  dans le repère orthonormé suivant.

