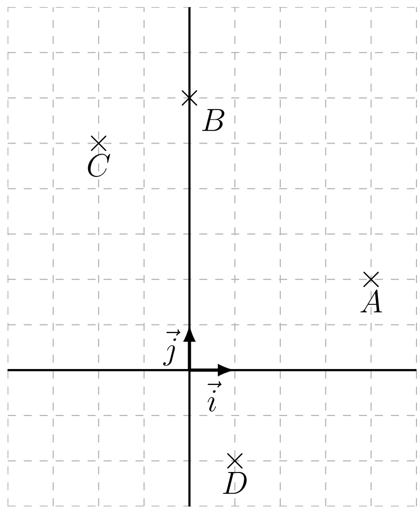
Exercices : Complexes et géométrie

1 Représentation des complexes dans le plan

Les exercices 1 à 4 utilisent la figure ci-contre.



► **Exercice 1**
Donner les affixes des points A, B, C et D.

► **Exercice 2**
Donner les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

► **Exercice 3**
Placer les points E et F, d'affixes respectives $2+3i$ et $-1-i$.

► **Exercice 4**
Montrer, en utilisant un calcul, que les points A, E et C sont alignés.

► **Exercice 5**
Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1+4i$, $2-i$ et $-3-5i$.

1. Déterminer l'affixe du point I, milieu du segment $[AB]$.
2. Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Déterminer l'affixe du point E, symétrique du point A par rapport au point C.

► **Exercice 6**
Soit z un nombre complexe et M le point du plan complexe d'affixe z.

1. Que représente le point M_1 d'affixe $\overline{z}$ par rapport à M ?
2. Que représente le point M_2 d'affixe $-z$ par rapport à M ?
3. Que représente le point M_3 d'affixe $-\overline{z}$ par rapport à M ?

► **Exercice 7**
Soit A, B et C trois points du plan complexe, d'affixes respectives a, b et c. Soit G le point du plan complexe tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$.

1. Exprimer l'affixe g du point G en fonction de a, b et c.
2. Soit I le milieu du segment $[BC]$. Montrer que les points A, G et I sont alignés.
3. Que représente le point G pour le triangle ABC ?
4. Application : On considère que $a=1-2i$, $b=-3+2i$ et $c=5+3i$. Placer les points A, B, C et G dans un repère orthonormé. Tracer alors les trois médianes sur triangle ABC.

2 Module d'un nombre complexe

► Exercice 8

Déterminer les modules des nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 + 2i \qquad z_2 = -4 + 3i \qquad z_3 = 5i \qquad z_4 = -3 \qquad z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

► Exercice 9

Soit A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives $1 + i$, $5i - 2$ et $2 + 4i$. Calculez les distances AB, AC et BC.

► Exercice 10

Soit $A(-4 + 4i)$, $B(2 + 7i)$, $C(4 + 3i)$ et $D(-2)$ quatre points du plan complexe.

1. Placer ces points dans le plan complexe ?
2. Quelle semble être la nature du quadrilatère $ABCD$?
3. Démontrer la conjecture de la question précédente.

► Exercice 11

Dans chacun des cas, interpréter géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant l'égalité donnée.

$|z - 3| = |z - 5 + i| \qquad |z - 2 - 5i| = |2i + 1 - z| \qquad \frac{|z + 1 - i|}{|z - 3 + 2i|} = 1$

$|z - 5 + 4i| = 2 \qquad |z - 3i + 1| \leqslant 4 \qquad |z + 4 - 2i| = |3 - 6i|$

► Exercice 12

Donner une équation du cercle de centre $C(1 + 2i)$ et de rayon 4.

► Exercice 13

Soit $A(4i)$, $B(9 + i)$ et $C(4 - 4i)$ trois points du plan complexe. Montrer que les points A, B et C sont sur le cercle de centre $D(4 + i)$ et de rayon 5.

► Exercice 14

Soit $z_1 = 2 + 5i$ et $z_2 = 3 - 2i$. Déterminer $|z_1|$ et $|z_2|$ puis en déduire $|z_1 z_2|$ et $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

► Exercice 15

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble de nombres complexes de module 1.

1. 0 appartient-il à $\mathbb{U}$? Donner aux moins quatre éléments de l'ensemble $\mathbb{U}$.
2. Montrer que le produit et le quotient de deux éléments de $\mathbb{U}$ appartient à $\mathbb{U}$. On dit que $\mathbb{U}$ est stable par multiplication et division.
3. La somme de deux éléments de $\mathbb{U}$ est-elle dans $\mathbb{U}$?
4. Montrer que si $z \in \mathbb{U}$, alors $z + \frac{1}{z}$ est réel. Que dire de $z^2 - \frac{1}{z^2}$?

► Exercice 16

Décrire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|(1 + i)z - 2i| = 2$.

► Exercice 17

Soit (z_n) une suite de nombre complexes et $l \in \mathbb{C}$. On dit que z_n tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n - l| = 0$. On admet que si z_n tend vers l et l', alors $l = l'$. On notera alors $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = l$.

1. Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{2i}{3}\right)^n$. Calculer $\left|\frac{1}{2} - \frac{2i}{3}\right|$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n$.
2. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = i$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1+i}{2} a_n + 1 - i$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $|a_{n+1} - 2| = \frac{|a_n - 2|}{\sqrt{2}}$
   (b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

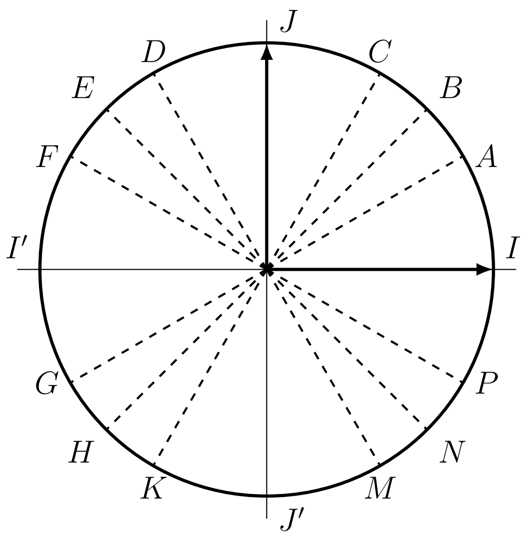
► Exercice 18

Soit z et z' deux nombres complexes. Montrer que $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$.
En déduire alors que dans un parallélogramme $ABCD$, on a $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

3 Trigonométrie

► Exercice 19

On considère le cercle trigonométrique tracé ci-dessous et sur lequel sont placés certains points.



Déterminer les points images par l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique des réels suivants

π	2π	-3π	18π
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{2}$	$\frac{-7\pi}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{-5\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$
$\frac{-7\pi}{4}$	$\frac{19\pi}{3}$	$\frac{-37\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{4}$

► Exercice 20

En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer les valeurs suivantes

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$	$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$	$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$	$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$	$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
$\cos\left(\frac{29\pi}{6}\right)$	$\sin\left(-\frac{35\pi}{6}\right)$	$\cos\left(\frac{21\pi}{4}\right)$	$\sin\left(-\frac{7241\pi}{2}\right)$

▶ **Exercice 21**
Soit x un réel. Que vaut $(\cos(x)+\sin(x))^2+(\cos(x)-\sin(x))^2$?

▶ **Exercice 22**
Résoudre les équations suivante sur $x \in]-\pi;\pi]$ puis sur $[0;2\pi[$.

$$\cos(x)=\frac{1}{2} \qquad \sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos(x)=0 \qquad \sin(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

▶ **Exercice 23**
Résoudre l'équation $\cos(x)^2-\frac{1}{2}=0$ sur $[0;2\pi]$.

▶ **Exercice 24**
Soit x un réel. Exprimer les quantités suivantes en fonction de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$.

$$\cos(\pi-x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \qquad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin(x+11\pi)$$

▶ **Exercice 25**
Soit x un réel. Exprimer $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

▶ **Exercice 26**
En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

▶ **Exercice 27**
En utilisant le fait que $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

▶ **Exercice 28**
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, pour tout réel x, $|\sin(nx)| \leqslant n\,|\sin(x)|$.

4 Argument d'un nombre complexe

▶ **Exercice 29**
Mettre les complexes suivants sous forme trigonométrique

$$z_1=2+2i \qquad z_2=\sqrt{3}-i \qquad z_3=\sqrt{3}+3i \qquad z_4=-42$$

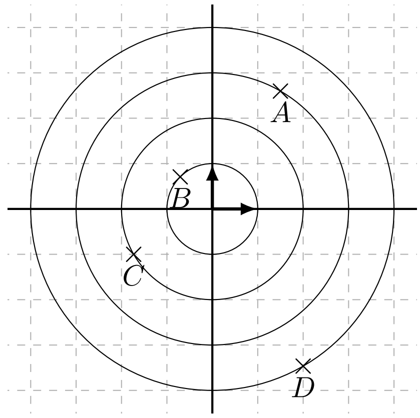
▶ **Exercice 30**
Écrire les complexes suivants sous forme algébrique

$$z_1=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \qquad z_2=5\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$z_3=\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 \qquad z_3=42\left(\cos\left(\frac{23\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{23\pi}{2}\right)\right)^{14}$$

▶ **Exercice 31**
Décrire géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z)=\frac{\pi}{4}$.

Les exercices suivants utilisent la figure ci-contre.



► Exercice 32
Donner le module et des arguments des points A, B, C et D.

► Exercice 33
Placer le point E d'affixe z tel que $|z| = 3$ et $\arg(z) \equiv \dfrac{5\pi}{4}\ [2\pi]$.

► Exercice 34
Placer le point F d'affixe $2\sqrt{3} - 2i$

► Exercice 35
Représenter sur cette figure l'ensemble des points d'affixe z tel que $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

► Exercice 36
On considère les complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
2. Déterminer le module et l'argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
3. Après avoir écrit $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique, déterminer les valeurs de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

► Exercice 37
On considère le complexe $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

1. Écrire z^2 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)$.

► Exercice 38
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
Soit z un complexe non nul. Exprimer $\arg(z^n)$ en fonction de $\arg(z)$.

► Exercice 39
En utilisant la forme trigonométrique, déterminer la valeur de $(1+i)^{2024}$.

► Exercice 40
Dans chacun des cas suivants, déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. $A(-2)$, $B(2+2i)$, $C(-5+6i)$
2. $A(-6+4i)$, $B(-3+5i)$, $C(6+8i)$
3. $A(-2-i)$, $B(3+i)$, $C(-9+2i)$
4. $A(2+2i)$, $B(6+3i)$, $C\left(4 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\dfrac{5}{2} + 2\sqrt{3}\right)\right)$

▶ Exercice 41
Soit $A(1+4i)$ et $B(3-2i)$. Déterminer l'affixe du point C, image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

▶ Exercice 42
On considère les points $A(-2+i)$, $B(-1-2i)$, $C(5)$ et $D(4+3i)$.

1. Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe.
2. Quelle semble être la nature du quadrilatère $ABCD$? Démontrer cette conjecture

▶ Exercice 43
On considère les points $A(1)$, $B\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C\left(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

5 Approfondir : Similitude directe

▶ Exercice 44
L'objectif de cet exercice est d'étudier certaines transformations du plan qui conservent les rapports de distance : ces transformations sont appelées **similitudes**. Vous avez pu croiser au cours de votre scolarité de nombreuses similitudes : symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation, homothétie. Nous nous intéresserons seulement aux similitudes qui conservent l'orientation des angles (également appelées **similitudes directes**).

Soit a et b deux complexes. On considère la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $z \mapsto az+b$. Pour un complexe z, on notera z' l'image de z par cette fonction. On note M le point du plan d'affixe z et M' le point du plan d'affixe z'.

Partie A : $a = 1$

1. Quelle est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$?
2. En déduire la nature de la similitude directe $z \mapsto z+b$.

Partie B : $a \neq 1$

1. Montrer qu'il existe un unique point du plan qui a pour image lui-même par l'application $z \mapsto az+b$. Exprimer son affixe en fonction de a et b. On appellera A ce point.
2. Que vaut $\dfrac{z'-z_A}{z-z_A}$? Exprimer alors $\left|\dfrac{z'-z_A}{z-z_A}\right|$ et $\arg\left(\dfrac{z'-z_A}{z-z_A}\right)$ en fonction des modules et argument de a. Quelles transformations géométriques sont en jeu ?
3. **Application** : On considère la transformation $z \mapsto (1+i\sqrt{3})z+\sqrt{3}(1-i)$. A l'aide des questions précédentes, interpréter géométriquement cette fonction.