Nombres complexes et géométrie

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. Le plan sera alors appelé **plan complexe**.

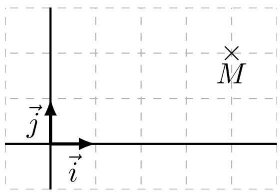
1 Représentation des complexes dans le plan

1.1 Affixe d'un point

Définition 1 — Affixe d'un point. : Soit z un complexe, a et b des réels tels que $z = a + ib$. On appelle point image de z le point M de coordonnées $(a; b)$.

Réciproquement, soit M un point du plan de coordonnées (x,y). On appelle affixe de M le complexe $x+iy$.

L'axe des des abscisses est alors appelé *axe des réels*. Celui des ordonnées est appelé *axe des imaginaires purs*.



■ **Exemple 1 :** Le point M ci-contre a pour coordonnées $(4,2)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

L'affixe du point M est $4 + 2i$. ■

Propriété 1 : Soit A et B deux points du plan, d'affixes respectives z_A et z_B.

- Les points A et B sont confondus si et seulement si $z_A = z_B$.
- Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

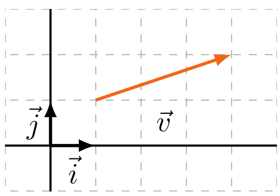
■ **Exemple 2 :** Soit M le point d'affixe $1 - 4i$ et N le point d'affixe $6 + 2i$.

Le milieu du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{1 - 4i + 6 + 2i}{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{7}{2} - i$. ■

1.2 Affixe d'un vecteur

Définition 2 — Affixe d'un vecteur. : Soit z un complexe, a et b des réels tels que $z = a + ib$. On appelle vecteur image de z le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Réciproquement, soit $\vec{v}$ un vecteur du plan complexe. On appelle affixe de $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le complexe $x + iy$.



■ **Exemple 3 :** Le vecteur $\vec{v}$ ci-contre a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

L'affixe du vecteur $\vec{v}$ est $3 + i$. ■

Les problèmes que nous traitions dans le plan avec les coordonnées de vecteurs se traduisent donc naturellement dans le plan complexe en terme d'affixe.

Propriété 2 : Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives $z_{\vec{v}}$ et $z_{\vec{w}}$ et k un réel.

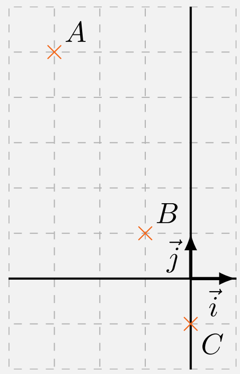
- Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont égaux si et seulement si $z_{\vec{v}} = z_{\vec{w}}$
- Le vecteur $\vec{v} + \vec{w}$ a pour affixe $z_{\vec{v}} + z_{\vec{w}}$.
- Le vecteur $k\vec{v}$ a pour affixe $kz_{\vec{v}}$

Ces propriétés découlent directement des propriétés des vecteurs dans le plan réel. De la même manière, on a la propriété suivante :

Propriété 3 : Soit A et B deux points du plan, d'affixes respectives z_A et z_B.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

■ **Exemple 4 :** Soit A, B et C trois points du plan d'affixes respectives $z_A = -3 + 5i$, $z_B = -1 + i$ et $z_C = -i$.



Il semblerait que les points A, B et C soient alignés. Montrons-le.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1 + i - (-3 + 5i) = 2 - 4i$$

- Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour affixe

$$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -i - (-3 + 5i) = 3 - 6i$$

Ainsi, $z_{\overrightarrow{AC}} = \frac{3}{2} z_{\overrightarrow{AB}}$, ce qui signifie que $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Les points A, B et C sont donc bien alignés. ■

2 Module d'un nombre complexe

Vous avez découvert lors de votre scolarité que le système de coordonnées cartésiennes ne constitue pas l'unique manière de repérer un point dans le plan. Plutôt que d'utiliser deux axes, représentant l'abscisse et l'ordonnée d'un point, il est également possible de repérer un point à l'aide d'un angle et de sa distance par rapport à l'origine du repère : il s'agit du système de coordonnées polaires.

Nous allons désormais traduire ce système de coordonnées polaires dans le plan complexe, à commencer par la distance à l'origine, que nous nommerons **module**.

2.1 Définition et interprétation

Définition 3 — Module. : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, avec a et b des réels.

Le module de z, noté $|z|$, est le réel positif défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

■ **Exemple 5 :** Soit $z = 4 - 3i$. Alors $|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ ■

Cette formule vous rappelle sans doute celle utilisée en classe de seconde pour déterminer la distance entre deux points du plan. Et pour cause !

Propriété 4 : Soit z un nombre complexe et M le point d'affixe z. Alors $|z| = OM$.

Démonstration 2.1 : On rappelle que la distance entre deux points $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ dans un repère orthonormé vaut $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ Or, si M est d'affixe $z = a + ib$, avec a et b des réels, ses coordonnées sont (a,b). Les coordonnées du point O sont par ailleurs $(0;0)$.

Finalement, $OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. □

Propriété 5 : Soit z un vecteur du plan. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan d'affixe z. Alors $||\vec{u}|| = |z|$.

Démonstration 2.2 : Cela découle directement de la propriété précédente. □

Propriété 6 : Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B. Alors $AB = |z_A - z_B|$.

Démonstration 2.3 : Là encore, c'est immédiat puisque $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$. □

■ **Exemple 6 :** Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$ et $z_B = 5 - 3i$. On a $z_A - z_B = 1 + 2i - (5 - 3i) = -4 + 5i$ et donc $AB = |z_A - z_B| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$. ■

Le module nous permet donc de traiter les distances dans le plan complexe. En particulier, il est facile de décrire un cercle, qui n'est autre que l'ensemble des points à une distance fixée d'un autre point du plan complexe, ou une médiatrice, qui est l'ensemble des points à égale distance de deux points fixés.

Propriété 7 : Soit A et B deux points du plan complexes, d'affixes respectives z_A et z_B. L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

■ **Exemple 7 :** L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - 3 + i| = |z + 4 - 2i|$ est la médiatrice du segment $[AB]$ où A et B sont les points d'affixes respectives $3 - i$ et $-4 + 2i$. ■

Propriété 8 : Soit M un point d'affixe z_M et r un réel positif.

L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - z_M| = r$ est le cercle de centre M et de rayon r.

■ **Exemple 8 :** L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - 1 + i| = 3$ est le cercle de centre le point A d'affixe $1 - i$ et de rayon 3. ■

2.2 Propriétés du module

Propriété 9 : Soit z un nombre complexe. $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Démonstration 2.4 : D'une part, si $z = 0$, alors $|z| = 0^2 + 0^2 = 0$.

D'autre part, notons $z = a + ib$, avec a et b des réels. Si $|z| = 0$, alors $a^2 + b^2 = 0$ et donc $a^2 = -b^2$.

Or, $a^2 \geqslant 0$ et $-b^2 \geqslant 0$. Il en vient que $a^2 = b^2 = 0$ et donc que $a = b = 0$. Ainsi, $z = 0$. □

Propriété 10 : Soit z un nombre complexe. Alors $|z|^2 = z\overline{z}$

Cette propriété a déjà été rencontrée lors d'exercices du premier chapitre sur les nombres complexes, il est grand temps de l'officialiser. La démonstration ne provoquera aucune surprise.

Démonstration 2.5 : Soit $z = a + ib$. Alors $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$ □

L'interprétation du module d'un complexe à l'aide de son conjugué nous permet de démontrer facilement certaines propriétés relatives au module.

Propriété 11 : Soit z et z' deux nombres complexes, n un entier relatif. Alors,

$|z| = |\overline{z}|$ $\qquad |zz'| = |z| \times |z'|$ $\qquad$ Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ $\qquad$ Si $z \neq 0$, $|z^n| = |z|^n$

Démonstration 2.6 : On a $|zz'|^2 = zz' \times \overline{zz'} = z \times z' \times \overline{z} \times \overline{z'} = z\overline{z} \times z'\overline{z'} = |z|^2 \times |z'|^2$. Les modules étant des réels positifs, il suffit d'appliquer la racine carrée des deux côtés de l'égalité pour retrouver le résultat voulu.

Les autres points se démontrent de manière analogue, toujours en utilisant les propriétés de la conjugaison. □

Il vient en particulier que pour tout nombre complexe non nul z, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

En revanche, il est faux en général que le module de la somme de deux complexes est égal à la somme des modules de ces nombres (cela reviendrait à écrire que pour tout réels positifs x et y, $\sqrt{x+y}$ est égal à $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, ce que vous savez totalement faux. Il existe toutefois une relation utile, que nous admettrons pour ce chapitre.

Propriété 12 — Inégalité triangulaire. : Soit z et z' deux nombres complexes. Alors $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$. De plus, $|z+z'| = |z| + |z'|$ si et seulement s'il existe un réel λ tel que $z = \lambda z'$.

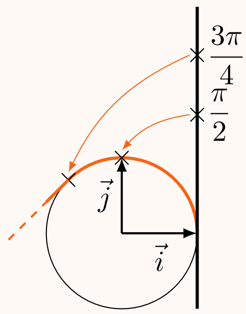
3 Argument d'un nombre complexe

Maintenant que nous avons réglé la question de la distance entre un point du plan complexe et l'origine, nous allons nous intéresser à celle de l'angle. Et qui dit angle dit forcément trigonométrie. Commençons donc par quelques rappels et compléments.

3.1 Rappels de trigonométrie

Définition 4 — Cosinus et sinus d'un nombre réel. : On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1 que l'on parcourt dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

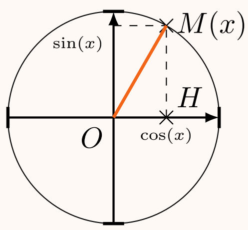
Ce sens est appelé sens trigonométrique.
On trace la droite des réels à droite de ce cercle trigonométrique, parallèlement à l'axe des ordonnées, puis on l'enroule autour d'une cercle trigonométrique.
A chaque point x sur cette droite des réels, on associe ainsi un unique point $M(x)$ sur le cercle.



Soit donc x un réel et $M(x)$ son image sur le cercle trigonométrique.

On appelle :

- Cosinus de x, noté $\cos(x)$, l'abscisse de $M(x)$
- Sinus de x, noté $\sin(x)$, l'ordonnée de $M(x)$



Propriété 13 : Pour tout réel x, $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.

Démonstration 3.1 : Soit x un réel et M son point image sur le cercle trigonométrique. Puisque M est sur le cercle trigonométrique, $OM = 1$. Par ailleurs, les coordonnées du point M sont $(\cos(x), \sin(x))$ et donc $OM = \sqrt{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}$. Ainsi, $\sqrt{\cos(x)^2 + \sin(x)^2} = 1$ et donc $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ □

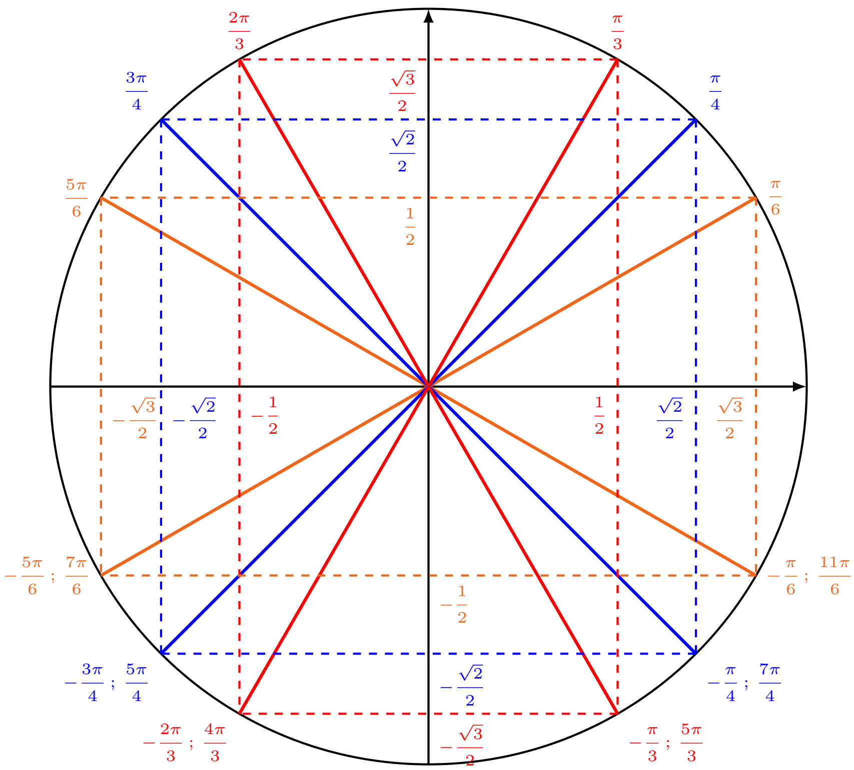
Propriété 14 : Pour tout réel x,

- $\cos(-x) = \cos(x)$: la fonction cosinus est paire.
- $\sin(-x) = -\sin(x)$: la fonction sinus est impaire.
- Pour tout entier relatif k, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$. La fonction cosinus est 2π-périodique
- Pour tout entier relatif k, $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$. La fonction sinus est 2π-périodique

■ **Exemple 9 :** On retiendra en particulier les valeurs remarquables suivantes.

Réel x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

■



3.2 Formules de trigonométrie

Les valeurs remarquables du sinus et du cosinus sont à connaître par coeur... Tout autant que les formules qui vont suivre !

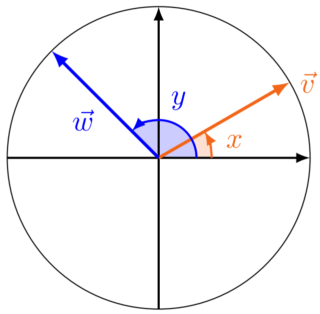
Propriété 15 — Formules d'addition pour le cosinus. : Pour tous réels x et y,

- $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

Démonstration 3.2 : Soit x et y deux réels. On considère les vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos(x)\\ \sin(x)\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}\cos(y)\\ \sin(y)\end{pmatrix}$.

D'une part, le repère dans lequel nous travaillons étant orthonormé, $\vec{v}\cdot\vec{w} = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$.

Par ailleurs, on sait que $\vec{v}\cdot\vec{v} = ||\vec{v}|| \times ||\vec{w}|| \times \cos(\vec{v}, \vec{w})$.



Or,
- $||\vec{v}|| = \sqrt{\cos(x)^2 + \sin(x)^2} = 1$
- De même, $||\vec{w}|| = \sqrt{\cos(y)^2 + \sin(y)^2} = 1$
- L'angle entre les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ a pour mesure $y - x$.

En combinant les deux manières d'écrire $\vec{v}\cdot\vec{w}$, on aboutit à

$$\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) = \cos(y-x) = \cos(x-y)$$

La deuxième propriété se démontre en prenant $-y$ à la place de y, en en utilisant que $\sin(-y) = -\sin(y)$. □

A l'aide de cette formule, il est notamment possible, moyennant la connaissance de certaines valeurs du sinus et du cosinus, de déterminer d'autres valeurs du sinus et du cosinus pour des réels particuliers.

■ **Exemple 10 :** En remarquant que $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$, on obtient

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Ainsi,

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

■

Cette formule nous permet par ailleurs de relier simplement le cosinus et le sinus d'un réel x.

■ **Exemple 11 :** Pour tout réel x, $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$ ■

Propriété 16 — Formules d'addition pour le sinus. : Pour tous réels x et y,

- $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$
- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

Démonstration 3.3 : Soit x et y deux réels. Dans l'exemple précédent, nous avons démontré que

$$\sin(x+y) = \cos\left(x+y-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Ainsi, en utilisant les formules d'additions sur le cosinus, on obtient

$$\sin(x+y) = \cos(x)\cos\left(y-\frac{\pi}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(y-\frac{\pi}{2}\right)$$

Or,

$$\cos\left(y-\frac{\pi}{2}\right) = \cos(y)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(y)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(y)$$

et

$$\sin\left(y-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(y-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = \cos(y-\pi) = \cos(y)\cos(\pi)+\sin(y)\sin(\pi) = -\cos(y)$$

Finalement,

$$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$$

En remplaçant y par $-y$, on obtient la deuxième formule. □

■ **Exemple 12 :** En remarquant une nouvelle fois que $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$, on obtient

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Ainsi,

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

■

3.3 Argument d'un nombre complexe

La question de la trigonométrie étant réglé, il est temps de revenir à notre question d'angles et de coordonnées polaires. Si l'on prend un complexe non nul z et que l'on divise ce nombre par son module, on obtient alors un complexe de module 1, qui n'est rien d'autre qu'un point du cercle trigonométrique.

Par ailleurs, tout point du cercle trigonométrique est caractérisé par un angle, et donc, par son cosinus en abscisse et son sinus en ordonnées... D'où la définition suivante.

Définition 5 — Argument – Forme trigonométrique. : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. Il existe DES réels θ tels que

$$z = |z| \times (\cos(\theta) + i\,\sin(\theta))$$

Cette forme est appelée **forme trigonométrique** du complexe z.

On dit par ailleurs qu'un tel θ est UN **argument** du nombre complexe z. On note $\theta = \arg(z)$.

■ **Exemple 13 :** Soit $z = 1 + i$. Alors $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Ainsi, $z = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

On rappelle par ailleurs que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On a donc $z = \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

On cherche donc un réel θ tel que $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Une solution est $\theta = \frac{\pi}{4}$. Ainsi,

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Cependant, il est également possible d'écrire

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right)$$

Ainsi, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{9\pi}{4}$ sont des arguments de $1 + i$. ■

Définition 6 — Congruence modulo 2π. : Soit θ et γ deux réels. On dit que θ est congrus à γ modulo 2π s'il existe un entier relatif k tel que $\theta = \gamma + k \times 2\pi$. On écrit $\gamma \equiv \theta\ [2\pi]$

■ **Exemple 14 :** Puisque $\frac{19\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2 \times 2\pi$, on a que $\frac{19\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$. ■

Propriété 17 : Soit z un nombre complexe, θ un argument de z et γ un réel. Alors γ est un argument de z si et seulement si $\gamma \equiv \theta\ [2\pi]$

Il existe donc une infinité d'arguments pour un nombre complexe non nul z... Néanmoins, uniquement l'un d'entre eux se trouve dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$, ce qui nous conduit à la définition suivante.

Définition 7 — Argument principal. : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Il existe un UNIQUE $\theta \in]-\pi\,;\,\pi]$ tel que

$$z = |z| \times (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

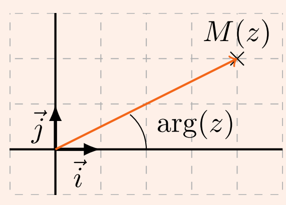
Ce réel θ est appelé **argument principal** de z.

■ **Exemple 15 :** L'argument principal de $1 + i$ est $\frac{\pi}{4}$. ■

3.4 Interprétation géométrique

Propriété 18 : Soit z un nombre complexe non nul.

- Soit M le point du plan complexe d'affixe z. $\arg(z)$ est une mesure en radians de l'angle orienté entre les vecteurs $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$ (c'est-à-dire en tournant de $\vec{i}$ vers $\overrightarrow{OM}$ dans le sens trigonométrique).
- Soit $\vec{w}$ un vecteur du plan d'affixe z. $\arg(z)$ est une mesure en radians de l'angle orienté entre les vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{OM}$.



■ **Exemple 16 :** On a $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$. Pour tout réel positif x, $\arg(x) = 0$. ■

Propriété 19 : Soit z un nombre complexe.

- z est un réel positif si et seulement si $\arg(z) \equiv 0\,[2\pi]$.
- z est un réel négatif si et seulement si $\arg(z) \equiv \pi\,[2\pi]$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$.

3.5 Propriétés des arguments

Propriété 20 : Soit z un nombre complexe non nul.

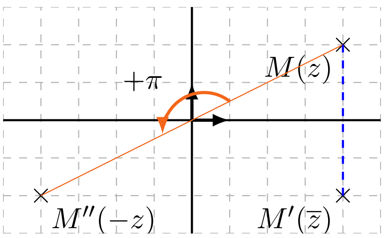
- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\,[2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\,[2\pi]$

Démonstration 3.4 : Soit z un nombre complexe non nul. Notons $z = |z| \times (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

- On a $-z = |z| \times (\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z| \times (-\cos(\theta) - i\sin(\theta))$. Or, $-\cos(\theta) = \cos(\pi + \theta)$ et $-\sin(\theta) = \sin(\pi + \theta)$.
  Ainsi, $-z = |z| \times (\cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta))$ et donc $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\,[2\pi]$
- On a $\overline{z} = |z| \times (\cos(\theta) - i\sin(\theta))$. Or, $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ et $-\sin(\theta) = \sin(-\theta)$.
  Ainsi, $\overline{z} = |z| \times (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ et donc $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\,[2\pi]$

□

Il est plus simple de visualiser graphiquement cette propriété. Prenons un point M d'affixe z non nulle.



Le point M' d'affixe $-z$ est le symétrique du point M par rapport à l'origine : c'est l'image de la rotation d'angle π de centre O. On ajoute donc π à l'argument de z.

Le point M'' d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique du point M par rapport à l'axe des abscisses : son argument est donc l'opposé de celui de z.

Une propriété beaucoup plus intéressante de l'argument est son comportement vis-à-vis du produit.

Propriété 21 : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls. Alors $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]$.

Démonstration 3.5 : Écrivons z et z' sous forme trigonométrique. On a alors $z = |z| \times (\cos(\theta) + i\ \sin(\theta))$ et $z' = |z'| \times (\cos(\theta') + i\ \sin(\theta'))$. Alors,

$$\begin{aligned} zz' &= |zz'| \times (\cos(\theta) + i\ \sin(\theta))(\cos(\theta') + i\ \sin(\theta')) \\ &= |zz'| \times (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta'))) \end{aligned}$$

On reconnaît les formules d'addition du sinus et du cosinus. Ainsi,

$$zz' = |zz'| \times (\cos(\theta + \theta') + i\ \sin(\theta + \theta'))$$

En particulier, on a bien $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]$. □

Propriété 22 : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, n un entier naturel.

Alors $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$ et $\arg(z^n) \equiv n\ \arg(z)\ [2\pi]$

3.6 Angle orienté

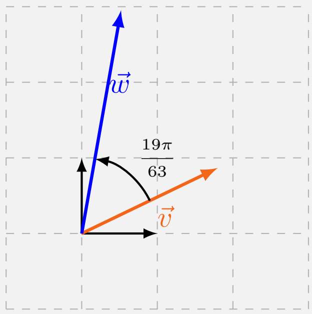
Définition 8 : Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs du plan complexe, d'affixes $z_{\vec{v}}$ et $z_{\vec{w}}$.

L'angle orienté entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$, noté $(\vec{v}, \vec{w})$, a pour mesure $\arg(z_{\vec{w}}) - \arg(z_{\vec{v}})$.

■ **Exemple 17 :** Soit $\vec{v}$ d'affixe $z_{\vec{v}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$ et $\vec{w}$, d'affixe $z_{\vec{w}} = 3\left(\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right)$.

L'angle orienté $(\vec{v}, \vec{w})$ a pour mesure $\frac{4\pi}{9} - \frac{\pi}{7} = \frac{19\pi}{63}$.

Graphiquement, cela signifie que si l'on place nos deux vecteurs sur le plan complexe en prenant pour chacun d'eux la même origine que celle du repère, l'angle entre ces deux vecteurs, en partant de $\vec{v}$ et en allant vers le vecteur $\vec{w}$ en tournant dans le sens trigonométrique a une mesure de $\frac{19\pi}{63}$ radians.



■

Venons-en alors au fait principal : étant donnés trois points A, B et C dont on connaît les affixes, comment est-il possible de déterminer l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$?

Pour cela, il faut retrancher l'argument de $z_{\overrightarrow{AB}}$ à celui de $z_{\overrightarrow{AC}}$. La propriété précédente nous invite donc à étudier le quotient de ces deux affixes.

Propriété 23 : Soit A, B et C trois points du plan complexe, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

Une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

■ **Exemple 18 :** Soit A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = 2+3i$, $z_B = 5+2i$ et $z_C = 6+5i$. Nous cherchons une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Or,

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{6+5i-(2+3i)}{5+2i-(2+3i)} = \frac{4+2i}{3-i}$$

Mettons ce nombre sous forme algébrique

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(4+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{12-2+(4+6)}{10} = \frac{10i+10}{10} = 1+i$$

Or, nous avons vu dans un précédent exemple que $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Ainsi, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$. ■