DS8 : Bac blanc 2020

► **Exercice 1 — 8 points.**
En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants. Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante en centimètres, avant qu'elle ne soit taillée, en mars de l'année $2015 + n$. On a ainsi $h_0 = 80$.

1. Puisque l'on coupe un quart de la plance chaque année, il en reste 3 quarts. Cette plante pousse alors de 30 centimètres. On a alors que pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = \frac{3}{4}h_n + 30$.
2. Pour tout entier naturel n, , on considère la proposition $P(n)$: $h_n \leqslant 120$.
   (a) $h_0 = 80$: on a bien $h_0 \leqslant 120$, $P(0)$ est vraie.
   (b) Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $h_n \leqslant 120$. En multipliant par $\frac{3}{4}$ et en ajoutant 30, on a alors $\frac{3}{4}h_n + 30 \leqslant \frac{3}{4} \times 120 + 30$, c'est-à-dire $h_{n+1} \leqslant 120$. $P(n+1)$ est vraie.
   (c) Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
3. Pour tout entier naturel n,
$$h_{n+1} - h_n = \frac{3}{4}h_n + 30 - h_n = -\frac{1}{4}h_n + 30$$
Or, $h_n \leqslant 120$ donc $-\frac{1}{4}h_n \geqslant -30$ et $-\frac{1}{4}h_n + 30 \geqslant 0$. Ainsi, $h_{n+1} - h_n \geqslant 0$. La suite (h_n) est donc croissante.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = h_n - 120$.
   (a) Pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = h_{n+1} - 120 = \frac{3}{4}h_n + 30 - 120 = \frac{3}{4}(u_n + 120) - 90 = \frac{3}{4}u_n$$
   (b) La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $u_0 = h_0 - 120 = 80 - 120 = -40$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n = -40 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et $h_n = u_n + 120 = 120 - 40 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$
   (c) Puisque $-1 < \frac{3}{4} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = 120$. Après un certain temps, la taille de la plante sera proche de 1.20 m.
5. On souhaite savoir à partir de quelle année la plante dépassera 1,10 m. On utilise pour cela un algorithme.
   (a) Compléter le programme suivant, écrit en Python, pour qu'il renvoie la première année à partir de laquelle la plante dépasse les 1,10 m de hauteur avant sa taille.

```python
def seuil():
  H = 80
  N = 0
  while H < 110 :
    H = 3 * H / 4 + 30
    N = N +1
  return N
```

(b) On a $u_4 \simeq 107$ et $u_5 \simeq 110.5$. La plante dépasse 1,10 m après 5 ans.

► Exercice 2 — 8 points.
On considère la fonction f définie pour tout réel x par

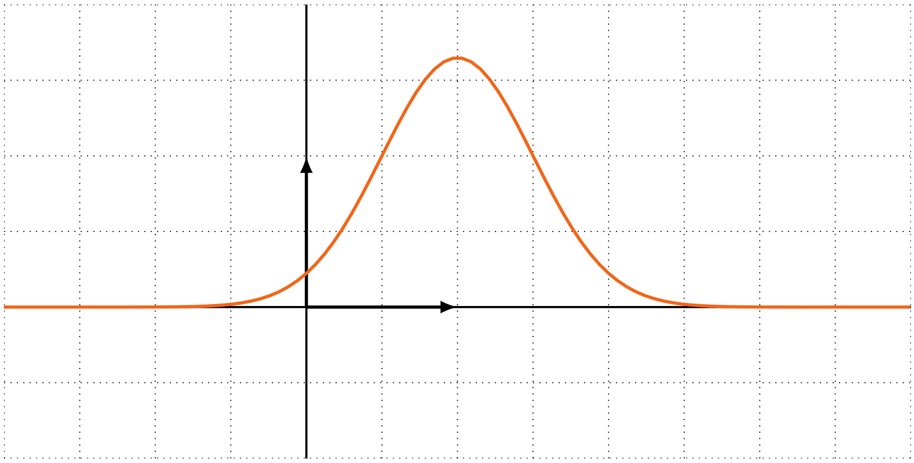
$$f(x)=\mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}$$

La courbe représentative de f dans un repère orthogonal sera notée $\mathcal{C}_f$.

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x=-\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^2+4x-\dfrac{3}{2}\right)=-\infty$. Or, $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$. Par composition, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.
Par ailleurs, pour tout réel $x>0$, $-2x^2+4x-\dfrac{3}{2}=x^2\left(-2+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{2x^2}\right)$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{2x^2}\right)=-2$. Il en vient que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^2+4x-\dfrac{3}{2}\right)$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.
2. f est l'exponentielle d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$$f'(x)=(-4x+4)\mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}$$
3. Pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $-4x+4$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\sqrt{e}$	$\searrow$	0

4. f' est dérivable par produit et pour tout réel x,
$$f''(x)=-4\mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}+(-4x+4)\times(-4x+4)\mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}=(16x^2-32x+12)\mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}$$
5. Représenter l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repère orthogonal ci-dessous.



► **Exercice 3 — 4 points.**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) de 6 questions (8 à l'origine, deux ont été retirées). Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est correcte.

Les questions sont indépendantes. Pour chaque question, indiquer la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

Question 1

Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^5+\dfrac{1}{n^6}}{n^2-2n^3}$?

A) $+\infty$	B) $-\infty$	C) $-\dfrac{1}{2}$	D) 0

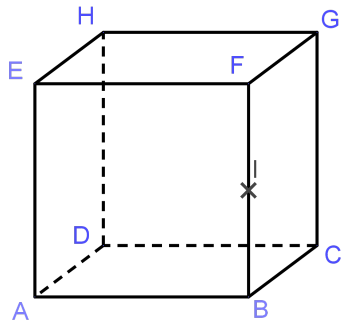
Réponse choisie : B

Question 2

On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$?

A) $+\infty$	B) $-\infty$	C) 0	D) Indéterminé

Réponse choisie : C



Question 3

On considère un cube $ABCDEFGH$ et on note I le milieu du segment $[BF]$. Parmi les droites suivantes, laquelle est sécante à la droite (CI) ?

A) (EF)	B) (FG)	C) (AD)	D) (HB)

Réponse choisie : B

Question 4

Dans ce même cube, quelle est l'intersection des plans (GFA) et (BAC) ?

A) Le point A	B) Le point G	C) La droite (AG)	D) La droite (AD)

Réponse choisie : D

Question 5

Pour tout réel x, on pose $f(x) = 2x^2$ et $g(x) = 3x + 1$. Que vaut $f \circ g(x)$?

A) $(6x+1)^2$	B) $2 \times (3x+1)^2$	C) $6x^2 + 1$	D) $6x^2 + 2$

Réponse choisie : B

Question 6

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x + 8}$ On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f'(x)$?

A) $\dfrac{1}{2\sqrt{2x^2+3x+8}}$	B) $\dfrac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x+8}}$	C) $\sqrt{4x+3}$	D) $-\dfrac{4x+3}{2x^2+3x+8}$

Réponse choisie : B