BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Lycée Saint-Exupéry – Mantes-la-Jolie
3 décembre 2022
Groupes T SPEA MATHS

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

Ce sujet comporte cinq pages numérotées de 1 à 5

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Tout autre document ou appareil électronique est interdit.

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

► Exercice 1 — 8 points.

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000. Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5% de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.

3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1520$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -0{,}05(u_n - 1520)$
   (c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
   (d) Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

4. On désigne par (a_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $a_n = u_n - 1520$.
   (a) Démontrer que la suite (a_n) est une suite géométrique de raison $0{,}95$ dont on précisera le premier terme.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

5. Recopier et compléter la fonction suivante, écrite en Python, pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```python
def seuil():
  U = 3000
  N = 0
  while ... :
    N = ...
    U = ...
  return ...
```

6. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture

► **Exercice 2 — 8 points.**

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.

Lors de la repousse, on modélise la longueur en centimètres de la queue du lézard en fonction du nombre de jours. Cette longueur est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 10e^{u(x)}$$

où u est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$u(x) = -\exp\left(2 - \frac{x}{10}\right)$$

où $\exp$ désigne la fonction exponentielle.

On admet que les fonctions u et f sont dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note u' et f' leurs fonctions dérivées respectives.

1. (a) Vérifier que pour tout réel x positif, on a

$$u'(x) = -\frac{1}{10}u(x)$$

   (b) En déduire que pour tout réel positif x, on a

$$f'(x) = -u(x)e^{u(x)}$$

   (c) Quel est le sens de variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$?

2. (a) Calculer $f(20)$. En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   (c) Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale. On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$ On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f' et on admet que, pour tout réel x positif :

$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)\,e^{u(x)}(1 + u(x))$$

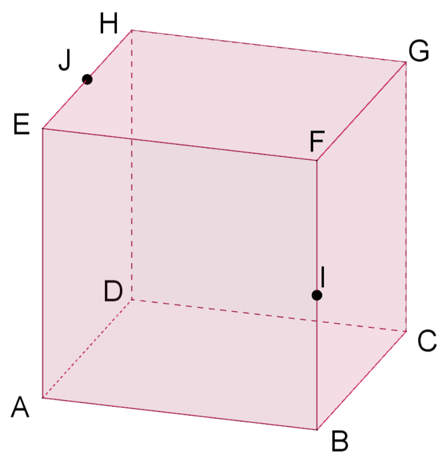
   (a) Déterminer les variations de f' sur $[0\,;\,+\infty[$.

   (b) En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale

► Exercice 3 — 4 points.
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) de 8 questions. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est correcte.

Pour chaque question, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

Pour les questions 1 à 5, on se place dans le cube $ABCDEFGH$ suivant. On considère par ailleurs les points I et J, milieux respectifs des segments $[BF]$ et $[EH]$. L'espace est par ailleurs muni du repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE})$.



Question 1

L'intersection du plan (IAB) avec le plan (JDH) est...

A) la point A	B) la droite (EA)	C) la droite (IE)	D) ...vide

Question 2

Les droites (IJ) et (HB) sont...

A) non coplanaires	B) sécantes	C) parallèles	D) perpendiculaires

Question 3

Quelles sont les coordonnées du point I ?

A) $(2\,;\,0\,;1)$	B) $\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;0\right)$	C) $\left(1\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$	D) $\left(0\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)$

Question 4

Laquelle de ces égalités vectorielles est vraie ?

A) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CH} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$	B) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FB}$	C) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$	D) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$

Question 5

Le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ a pour coordonnées...

A) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$	B) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$	C) $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	D) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Question 6

Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1-3^n}{1+2^n}$?

A) $-\infty$	B) -1	C) 1	D) $+\infty$

Question 7

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$ est

A) $y = ex + e$	B) $y = 2ex - e$	C) $y = 2ex + e$	D) $y = ex$

Question 8

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$ admet pour asymptote la droite d'équation

A) $x = -2$	B) $y = -1$	C) $y = -2$	D) $y = 0$