DM9 : Continuité, géométrie

► Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{3}{16} \end{cases}$$

1. Calculer u_1
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{4} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3}{4}$
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite en $+\infty$.

► Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le point A de coordonnées $(4; 1; -2)$ et la droite (d) de représentation paramétrique

$$(d) \quad : \quad \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$$

1. Montrer que le point A n'appartient pas à la droite (d).
2. On note (d') la droite passant par A et dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que (d') est orthogonale à la droite (d).
   (b) Donner une représentation paramétrique de (d')
   (c) Montrer que (d) et (d') sont sécantes en un point B dont on précisera les coordonnées.
   (d) Calculer la distance AB.
3. On considère désormais les points $C(3; 0; 5)$ et $D(5; -3; 9)$. On admet que ces points appartiennent à la droite (d). Déterminer l'aire du triangle ACD.

► Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-2x}$

1. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Étudier le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. En déduire le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$

► Exercice 4 — Plus difficile !.

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$. On suppose par ailleurs que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$ avec $l < 1$. Montrer qu'il existe un réel positif x tel que $f(x) = x$. Est-ce toujours vrai si l'on ne suppose pas que pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$?