DM9 : Continuité, géométrie

► **Exercice 1**

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{3}{16} \end{cases}$$

1. Calculer u_1

$$u_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{16} = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{4}{16} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$$

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{4} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3}{4}$

Pour tout entier naturel n,on considère la proposition $P(n)$: « $\dfrac{1}{4} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3}{4}$ »

- **Initialisation** : On a bien $\dfrac{1}{4} \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant \dfrac{3}{4}$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc

$$\frac{1}{4} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{4}$$

On applique alors la fonction $x \mapsto x^2$ qui est croissante sur $[0; +\infty[$. Il en vient que

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \leqslant u_{n+1}^2 \leqslant u_n^2 \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{16} \leqslant u_{n+1}^2 \leqslant u_n^2 \leqslant \frac{9}{16}$$

On ajoute alors $\dfrac{3}{16}$ à chaque membre, on a finalement

$$\frac{1}{16} + \frac{3}{16} \leqslant u_{n+1}^2 + \frac{3}{16} \leqslant u_n^2 + \frac{3}{16} \leqslant \frac{9}{16} + \frac{3}{16}$$

soit

$$\frac{1}{4} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}$$

$P(n+1)$ est vraie.

- $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. La suite est décroissante et comprise entre $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{3}{4}$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite en $+\infty$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle converge donc vers une limite l. De plus, la fonction $x \mapsto x^2 + \dfrac{3}{16}$ étant continue sur $\left[\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{3}{4}\right]$, cette limite l vérifie $l = l^2 - \dfrac{3}{16}$, c'est-à-dire

$$l^2 - l + \frac{3}{16} = 0$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times \dfrac{3}{16} = \dfrac{1}{4} > 0$. Cette équation possède donc deux solutions

$$l_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{\frac{1}{4}}}{2 \times 1} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad l_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{\frac{1}{4}}}{2 \times 1} = \frac{3}{4}$$

Les seules limites possibles sont donc $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{3}{4}$. Or, la suite (u_n) est décroissante et $u_0 = \dfrac{1}{2}$. $\dfrac{3}{4}$ ne peut donc pas être la limite de la suite (u_n). Finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{4}$

► Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le point A de coordonnées $(4; 1; -2)$ et la droite (d) de représentation paramétrique

$$(d) \quad : \quad \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$$

1. Montrer que le point A n'appartient pas à la droite (d).

Supposons que le point A appartienne à (d). Il existerait alors un réel t tel que $3 + 2t = 4$ et $-3t = 1$. Ainsi, on aurait $t = \dfrac{1}{2}$ et $t = -\dfrac{1}{3}$. Ce n'est pas possible. Le point A n'appartient pas à la droite (d).

2. On note (d') la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que (d') est orthogonale à la droite (d).

Le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dirige (d). De plus,

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \times 3 + (-3) \times -2 + 4 \times (-3) = 6 + 6 - 12 = 0$$

Les droits (d) et (d') sont donc orthogonales.

(b) Donner une représentation paramétrique de (d')

Une représentation paramétrique de la droite (d') est

$$(d') \quad : \quad \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$$

(c) Montrer que (d) et (d') sont sécantes en un point B dont on précisera les coordonnées.

On résout le système

$$\begin{cases} 3 + 2t' = 4 + 3t \\ -3t' = 1 - 2t \\ 5 + 4t' = -2 - 3t \end{cases}$$

En ajoutant les premières et dernières lignes, on a

$$\begin{cases} 3 + 2t' = 4 + 3t \\ -3t' = 1 - 2t \\ 8 + 6t' = 2 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} 3 - 2 = 4 + 3t \\ -3 \times (-1) = 1 - 2t \\ t' = -1 \end{cases}$$

et finalement

$$\begin{cases} t = -1 \\ t' = -1 \end{cases}$$

En prenant par exemple $t = -1$ dans l'équation de (d') on trouve que le point B a pour coordonnées $(1{,}3{,}1)$.

(d) Calculer la distance AB.

$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (3-1)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$

3. On considère désormais les points $C(3;0;5)$ et $D(5;-3;9)$. On admet que ces points appartiennent à la droite (d). Déterminer l'aire du triangle ACD.

La hauteur du triangle ACD issue de A n'est autre que la droite (AB). En effet, B appartient à la droite (CD) (qui est la droite (d)) et les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires. Ainsi, l'aire du triangle ACD vaut $\dfrac{AB \times CD}{2}$. Or, $CD = \sqrt{(5-3)^2 + (-3-0)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$. Il en vient que l'aire de ACD vaut $\dfrac{\sqrt{22} \times \sqrt{29}}{2}$

► Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-2x}$

1. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Par simple opération sur les limites, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2. Étudier le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 1 + 2e^{-2x}$ qui est toujours strictement positif. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel α tel que $f(\alpha) = 0$. De plus, la fonction f étant strictement croissante, ce réel est unique. Celui-ci vaut environ 0,44.

4. En déduire le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$

$f(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant \alpha$ et $f(x) > 0$ si $x > \alpha$.

► Exercice 4 — Plus difficile !.

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$. On suppose par ailleurs que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$ avec $l < 1$. Montrer qu'il existe un réel positif x tel que $f(x) = x$. Est-ce toujours vrai si l'on ne suppose pas que pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$?

Si $f(0) = 0$, alors la question est réglée...
Sinon, on a $f(0) > 0$ et donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l < 1$ et que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$, il en vient que, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel strictement positif α tel que $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = 1$, c'est-à-dire $f(\alpha) = \alpha$
L'hypothèse que pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$ est primordiale. Par exemple, la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x+1}$ tend vers 0 en l'infini (qui est bien plus petit que 1) mais n'admet aucun point fixe sur $\mathbb{R}_+$: les antécédents sont positifs alors que les images sont négatives.