DM10 : Nouvelle année !

► Exercice 1 — Continuité.
On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 1 + x - e^{0.5x-2}$. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Partie A : étude de la fonction f

1. (a) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+x) = -\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} (0.5x-2) = -\infty$ et donc, par composition de limite, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{0.5x-2} = 0$. Ainsi, par somme de limite, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

   (b) Pour tout réel x non nul,
$$f(x) = 1 + 0.5x \times 2 - e^{0.5x} \times e^{-2} = 1 + 0.5x\left(2 - \frac{e^{0.5x}}{0.5x} \times e^{-2}\right)$$

   (c) Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{0.5x}}{0.5x} = +\infty$. Il en vient, par opérations sur le slimites, que $\lim\limits_{x\to+\infty} = -\infty$.

2. (a) Pour tout réel x, $f'(x) = 1 - 0.5e^{0.5x-2}$ et $f''(x) = -0.25e^{0.5x-2}$

   (b) f' est continue. Par ailleurs, $f'(4) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(6) \simeq -0.36$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\alpha \in [4{,}6]$ tel que $f'(\alpha) = 0$. De plus, puisque pour tout réel x, $f''(x) < 0$, la fonction f' est strictement décroissante : un tel réel α est donc unique.

   (c) On a

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

Partie B : Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie précédemment.

1. Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. »
   - On a $u_0 = 0$ $u_1 = 1 + e^{-2} > 0$. On a bien $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$. $P(0)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a alors $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. Or, f est croissante sur $]-\infty; 4]$. On a donc $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$. $P(n+1)$ est vraie.
- $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. (u_n) est croissante et majorée. Ainsi, (u_n) converge.
3. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, on a $f(l) = l$. Or,

$$f(l) = l \Leftrightarrow 1 + l - e^{0.5l-2} = l \Leftrightarrow e^{0.5l-2} = 1 \Leftrightarrow 0.5l - 2 = 0 \Leftrightarrow l = 4$$

La limite de la suite (u_n) est 4.

► Exercice 2 — Géométrie dans l'espace.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ On considère les points $A(5;0;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(1;0;3)$, $D(5;4;3)$ et $E(10;9;8)$. On note R le milieu du segment $[AB]$

1. (a) Le point R a pour coordonnées $(3;2;-1)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -4 & \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) Soit P_1 le plan passant par le point R et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal. Une équation de P_1 est

   $$-4(x-3) + 4(y-2) = 0$$

   soit

   $$-4x + 4y + 4 = 0$$

   En divisant cette équation par -4, on a alors $x - y - 1 = 0$

   (c) $x_E - y_E - 1 = 10 - 9 - 1 = 0$. Ainsi, E appartient au plan P_1. De plus,
   - $AE = \sqrt{(10-5)^2 + (9-0)^2 + (8-(-1))^2} = \sqrt{25+81+81} = \sqrt{187}$
   - $BE = \sqrt{(10-1)^2 + (9-4)^2 + (8-(-1))^2} = \sqrt{81+25+81} = \sqrt{187}$

   On a bien $EA = EB$.

2. On considère le plan P_2 d'équation cartésienne $x - z - 2 = 0$

   (a) Le plan P_2 admet le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal. Ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix} -4 & \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ qui est, lui, normal au plan P_2. Les plans P_1 et P_2 ne sont donc pas parallèles. Par conséquent, ils sont sécants.

   (b) On note Δ la droite d'intersection de P_1 et P_2. En posant $z = t$ dans l'équation de P_2, on a $x - t - 2 = 0$ dans l'équation de P_2 et donc $x = 2 + t$. En remplaçant x dans l'équation de P_1, on a alors $2 + t - y - 1 = 0$ et donc $y = 1 + t$. Finalement, une représentation paramétrique de la droite Δ est :

   $$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 1 + t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{array} \right.$$

3. On considère le plan P_3 d'équation cartésienne $y + z - 3 = 0$. En remplaçant y et z à l'aide de l'équation de Δ, on obtient que $1 + t + t - 3 = 0$ et donc que $t = 1$. En prenant $t = 1$ comme

paramètre dans la représentation de Δ, on trouve alors le point de coordonnées $(3{,}2{,}1)$. On peut vérifier par ailleurs que ce point apparitnet bien à P_3 : il s'agit donc bien du point d'intersection de Δ et P_3.

4. (a) On a
   - $\Omega A = \sqrt{(3-5)^2+(2-0)^2+(1-(-1))^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
   - $\Omega B = \sqrt{(3-1)^2+(2-4)^2+(1-(-1))^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
   - $\Omega C = \sqrt{(3-1)^2+(2-0)^2+(1-3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
   - $\Omega D = \sqrt{(3-5)^2+(2-4)^2+(1-3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

   On a bien $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$

   (b) Les points A, B, C et D appartiennent à la sphère de centre Ω et de rayon $2\sqrt{3}$.

► Exercice 3 — Approfondir – Démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires... Mais pour commencer, nous avons besoin de résultats supplémentaires sur les suites.

Partie A

Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles. On dit que (a_n) et (b_n) sont adjacentes si

- (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$.

L'objectif de cette première partie est de démontrer que deux suites adjacentes sont convergentes et de même limite.

1. Pour tout entier naturel n, on pose $c_n = b_n - a_n$

   (a) Pour tout entier naturel n,

   $$c_{n+1}-c_n = b_{n+1}-a_{n+1}-(b_n-a_n) = b_{n+1}-b_n-(a_{n+1}-a_n)$$

   Or, (b_n) est décroissante et donc $b_{n+1}-b_n \leqslant 0$. De plus, (a_n) est croissante et donc $-(a_{n+1}-a_n)\leqslant 0$. Ainsi, $c_{n+1}-c_n\leqslant 0$. La suite (c_n) est décroissante.

   (b) La suite (c_n) est décroissante et de limite 0. Ainsi, pour tout entier naturel n, $c_n \geqslant 0$ et donc $a_n \leqslant b_n$.
2. Pour tout entier naturel n, $a_n\leqslant b_n$. Or, (b_n) est décroissante et donc, pour tout entier naturel n, $b_n \leqslant b_0$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_0$. Un raisonnement similaire permet de conclure que, pour tout entier naturel n, $b_n \geqslant a_0$. La suite (a_n) est donc croissante et majorée par b_0, la suite (b_n) est décroissante et minorée par a_0. Ces deux suites sont donc convergentes.
3. Notons l_1 la limite de (a_n) et l_2 la limite de (b_n). On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n-\lim\limits_{n\to+\infty}b_n = l_1-l_2$. Ainsi, $l_1-l_2=0$ et donc $l_1=l_2$.

Partie B

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, avec $a<b$. Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. On suppose que $f(a)<k<f(b)$. On considère alors les suites (a_n) et (b_n) définies par

- $a_0=a$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)\geqslant k \\ \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)<k \end{cases}$

- $b_0 = b$ et, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k \\ b_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k \end{cases}$

Le but est évidemment de montrer que ces suites sont adjacentes. Dans l'ensemble des questions suivantes, il faudra raisonner par disjonction de cas, suivant la valeur de $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)$

1. Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $a_n \leqslant b_n$ » .
   - Pour $n = 0$, on a $a_0 = a$, $b_0 = b$, et on a bien $a_0 \leqslant b_0$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $a_n \leqslant b_n$.
     – En ajoutant a_n et en divisant par 2, on obtient que $a_n \leqslant \dfrac{a_n+b_n}{2}$. Dans le cas où $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$, on a donc encore $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$
     – En ajoutant b_n et en divisant par 2, on obtient que $\dfrac{a_n+b_n}{2} \leqslant b_n$. Dans le cas où $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k$, on a donc encore $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$

     Dans tous les cas, on a donc $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
2. Soit n un entier naturel. Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$
   - $a_{n+1} - a_n = a_n - a_n = 0$
   - $b_{n+1} - b_n = \dfrac{b_n+a_n}{2} - b_n = \dfrac{a_n-b_n}{2} \leqslant 0$

   Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$
   - $a_{n+1} - a_n = \dfrac{b_n+a_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n-a_n}{2} \geqslant 0$
   - $b_{n+1} - b_n = b_n - b_n = 0$

   Dans tous les cas, on a $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ et $b_{n+1} - b_n \leqslant 0$. (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
3. Soit n un entier naturel.
   - Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$, alors $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n+a_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n-a_n}{2}$
   - Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k$, alors $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \dfrac{b_n+a_n}{2} = \dfrac{b_n-a_n}{2}$

   Dans tous les cas, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n-a_n}{2}$
4. Ainsi, la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique, de raison $\dfrac{1}{2}$. Pour tout entier naturel n, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. d'après la partie 1, elles sont donc convergentes et de même limite.
5. D'après la définition des suites (a_n) et (b_n), on a que pour tout entier naturel n, $f(a_n) \leqslant k \leqslant f(b_n)$.
6. On note l la limite commune de (a_n) et (b_n) et on rappelle que f est continue sur $[a,b]$. Ainsi, en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient que $f(l) \leqslant k \leqslant f(l)$ et donc que $f(l) = k$.