DM10 : Nouvelle année !

► Exercice 1 — Continuité.
On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 1 + x - e^{0.5x-2}$. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Partie A : étude de la fonction f

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   (b) Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = 1 + 0.5x\left(2 - \dfrac{e^{0.5x}}{0.5x} \times e^{-2}\right)$
   (c) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. (a) Déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x.
   (b) Justifier qu'il existe un unique réel $\alpha \in [4;6]$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
   (c) Construire le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

Partie B : Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie précédemment.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge. On notera l la limite.
3. Justifier que $f(l) = l$ puis déterminer la valeur de l

► Exercice 2 — Géométrie dans l'espace.
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ On considère les points $A(5;0;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(1;0;3)$, $D(5;4;3)$ et $E(10;9;8)$. On note R le milieu du segment $[AB]$

1. (a) Déterminer les coordonnées du point R et du vecteur $\overrightarrow{AB}$
   (b) Soit P_1 le plan passant par le point R et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan P_1 est : $x - y - 1 = 0$
   (c) Démontrer que le point E appartient au plan P_1 et que $EA = EB$.
2. On considère le plan P_2 d'équation cartésienne $x - z - 2 = 0$
   (a) Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants.
   (b) On note Δ la droite d'intersection de P_1 et P_2. En posant $z = t$ dans les équations de P_1 et P_2, Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

3. On considère le plan P_3 d'équation cartésienne $y + z - 3 = 0$. Justifier que la droite Δ est sécante au plan P_3 en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.
4. (a) Justifier que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.
   (b) En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.

► Exercice 3 — Approfondir – Démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires... Mais pour commencer, nous avons besoin de résultats supplémentaires sur les suites.

Partie A

Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles. On dit que (a_n) et (b_n) sont adjacentes si

- (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$.

L'objectif de cette première partie est de démontrer que deux suites adjacentes sont convergentes et de même limite.

1. Pour tout entier naturel n, on pose $c_n = b_n - a_n$
   (a) Montrer que la suite (c_n) est décroissante.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $c_n \geqslant 0$ et en déduire que $a_n \leqslant b_n$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_0$ et $b_n \geqslant a_0$. Que peut-on en déduire sur les suites (a_n) et (b_n) ?
3. Montrer que (a_n) et (b_n) ont même limite.

Partie B

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, avec $a < b$. Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. On suppose que $f(a) < k < f(b)$. On considère alors les suites (a_n) et (b_n) définies par

- $a_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k \\ \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k \end{cases}$
- $b_0 = b$ et, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k \\ b_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k \end{cases}$

Le but est évidemment de montrer que ces suites sont adjacentes. Dans l'ensemble des questions suivantes, il faudra raisonner par disjonction de cas, suivant la valeur de $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_n$.
2. Montrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite b_n est décroissante.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n)$. Que peut-on en conclure sur les suites (a_n) et (b_n) ?
5. Montrer que pour tout entier naturel n, $f(a_n) \leqslant k \leqslant f(b_n)$.
6. On note l la limite commune de (a_n) et (b_n) et on rappelle que f est continue sur $[a,b]$. Montrer que $f(l) = k$.