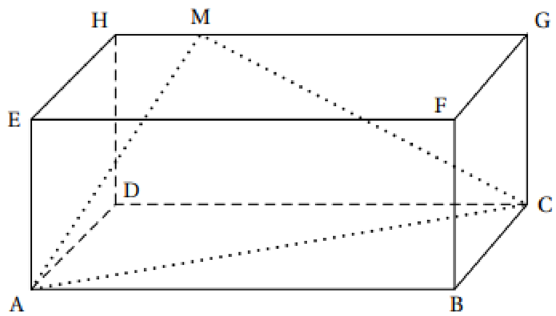
DM11 : Continuité, géométrie

► **Exercice 1**

Dans la figure ci-dessous, $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $AE = 2$.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées $(5; 0; 0)$, $(0; 3; 0)$ et $(0; 0; 2)$.



1. (a) Donner, dans le repère considéré, les coordonnées des points H et G.
   (b) Donner une représentation paramétrique de la droite (GH).
2. Soit M un point du segment $[GH]$ tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ avec $k \in [0; 1]$.
   (a) Justifier que les coordonnées de M sont $(5k; 3; 2)$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 25k^2 - 25k + 4$
   (c) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles AMC est un triangle rectangle en M. Quelles sont les coordonnées du point M dans ces cas ?

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées $(1; 3; 2)$. On admet que le triangle AMC est rectangle en M.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\frac{1}{3} \times$ Aire de la base $\times h$ où h est la hauteur relative à la base.

3. On considère le point K de coordonnées $(1; 3; 0)$.
   (a) Justifier que le point K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).
   (b) En déduire le volume du tétraèdre $MACD$.
4. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ est normal au plan (AMC). En déduire une équation cartésienne du plan (AMC).
5. On note Q le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (AMC).
   (a) Déterminer les coordonnées du point Q.
   (b) S'agit-il du projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC) ?
6. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC). Calculer la distance DP; en donner une valeur arrondie à 10^{-1}.

► Exercice 2

On considère la fonction g définie pour tout réel x par

$$g(x) = x^2e^x - 1$$

On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et note g' sa dérivée.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = x(x+2)e^x$
3. Construire le tableau de variations de g.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$. On notera α cette solution.
5. Donner une valeur de α à 10^{-2} près.

On considère désormais la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = x^3e^x$$

On considère alors la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
7. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$$

8. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.