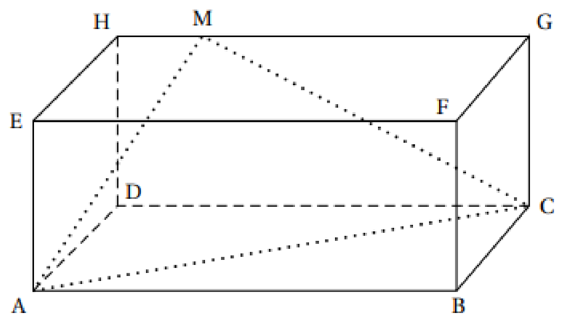
DM11 : Continuité, géométrie

► **Exercice 1**

Dans la figure ci-dessous, $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $AE = 2$.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées $(5; 0; 0)$, $(0; 3; 0)$ et $(0; 0; 2)$.



1. (a) On a $H(0{,}3{,}2)$ et $G(5{,}3{,}2)$

   (b) Une représentation paramétrique de la droite (GH) est $\begin{cases} x = 5t \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2. Soit M un point du segment $[GH]$ tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ avec $k \in [0; 1]$.

   (a) Notons (x,y,z) les coordonnées de M. Puisque $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$, il en vient que $\begin{pmatrix} x-0 \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5k \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Les coordonnées de M sont $(5k; 3; 2)$.

   (b) Les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $\begin{pmatrix} 5k \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et celles de $\overrightarrow{CM}$ sont $\begin{pmatrix} 5k-5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ainsi,

   $$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 5k(5k-5) + 4 = 25k^2 - 25k + 4$$

   (c) AMC est un triangle rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$, c'est-à-dire $25k^2 - 25k + 4 = 0$. C'est une équation du second degré dont les solutions sont $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{5}$. Les coordonnées de M pour lesquelles le triangle AMC est rectangle en M sont donc $(1; 3; 2)$ et $(4; 3; 2)$.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées $(1; 3; 2)$. On admet que le triangle AMC est rectangle en M.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\frac{1}{3}\times$ Aire de la base $\times h$ où h est la hauteur relative à la base.

3. On considère le point K de coordonnées $(1;3;0)$.
   (a) D'une part, le point K se trouve sur la droite (CD) et appartient donc au plan (ACD). D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{KM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}530\end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$. On a alors $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{KM} = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{KM}$ est donc normal au plan (ACD). K est bien le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).
   (b) Prenant ACD comme base, la hauteur correspondante est $[KM]$.
   - L'aire de ACD vaut $5\times 3\times 0.5$
   - La longueur KM vaut 2
   - Ainsi, le volume de la pyramide $MACD$ vaut $\frac{1}{3}\times 5\times 3\times 0.5\times 2 = 5$ unités de volume.

   (c) On a
   - $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times 5 + (-5)\times 3 + 0\times 6 = 0$
   - $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 1\times 3 + 3\times(-5) + 2\times 6 = 0$

   Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-5\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (AMC). Une équation cartésienne du plan (AMC) est donc $3x-5y+6z=0$ (on a utilisé le point $A(0,0,0)$).
   (d) On note Q le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (AMC).
      i. La droite (FD) a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x = 5t\\ y = 3-3t\\ z = 2t\end{cases},t\in\mathbb{R}$ En injectant ces coordonnées dans l'équation de (AMC) on trouve que $3\times 5t - 5(3-3t) + 6\times 2t = 0$ et donc que $t=\frac{15}{42}$. Les coordonnées de Q sont donc $\left(\frac{15}{7},\frac{9}{4},\frac{5}{7}\right)$
      ii. Les droites (DQ) et (AC) ne sont pas orthogonales. Q n'est pas le projeté orthogonal de D sur (AMC).
   (e) On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC). Prenant AMC comme base du tétraèdre $MACD$, la hauteur associée est DP. Or, l'aire du triangle AMC, rectangle en M vaut $\frac{1}{2}\times AM\times MC$.
   - $AM = \sqrt{1^2+3^2+2^2} = \sqrt{14}$
   - $MC = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

   Le volume de $MACD$ vaut 5. On a donc $5 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{14}\times 2\sqrt{5}\times DP$.
   Finalement, $DP = \dfrac{5\times 3\times 2}{\sqrt{14}\times 2\sqrt{5}} \simeq 1.8$.

► **Exercice 2**

On considère la fonction g définie pour tout réel x par

$$g(x) = x^2e^x - 1$$

On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et note g' sa dérivée.

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$.
2. Pour tout réel x,

$$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x = x(2 + x)e^x$$

3. Le tableau de variations de g.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	-1	$\nearrow$	$\simeq 0.46$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

4. Pour tout réel négatif, on a $f(x) \leqslant g(-2) < 0$. Par ailleurs, $g(0) = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et f est continue sur $[0; +\infty[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ possède une solution sur $[0; +\infty[$. De plus, cette fonction étant strictement croissante sur cet intervalle, cette solution est unique.
5. On trouve $\alpha \simeq 0.70$

On considère désormais la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = x^3e^x$$

On considère alors la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x = x^2(3 + x)e^x$. $f'(x)$ est du signe de $3 + x$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$\simeq -1.34$	$\nearrow$	$+\infty$

7. Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$».
   - $u_1 = f(u_0) = f(-1) = -\dfrac{1}{e} \simeq -0.37$. On a bien $-1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 0$
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a alors $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$. En appliquant la fonction f qui est croissante sur $[-1; 0]$, on a donc $f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(0)$. Or, $f(0) = 0$ et $f(-1) = -\dfrac{1}{e} \geqslant -1$. On a donc bien $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0$
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
8. (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente. Puisque f est continue, la limite l de la suite (u_n) vérifie $f(l) = l$, soit $l^3e^l = l$. On a donc $l^3e^l - l = 0$ et donc $l \times (l^2e^l - 1)0$. Or, d'après la partie précédente, l'équation $x^2e^x - 1 = 0$ ne possède qu'une solution sur $\mathbb{R}$, et celle-ci est strictement positive. On a donc forcément $l = 0$.