BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Lycée Saint-Exupéry – Mantes-la-Jolie
3 décembre 2022
Groupes T SPEA MATHS

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

Ce sujet comporte cinq pages numérotées de 1 à 5

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Tout autre document ou appareil électronique est interdit.

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

► Exercice 1 — 9 points.

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000. Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5% de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Au 31 octobre, il y a 3080 cétacés. Leur nombre diminue alors de 5%. $\left(1 - \dfrac{5}{100}\right) \times 3080 = 2926$. On a bien $u_1 = 2926$.

2. Chaque année, le nombre de cétacés augmente de 80 puis diminue de 5%. On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95(u_n + 80) = 0{,}95u_n + 76$.

3. (a) Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n \geqslant 1520$ ».
   - $u_0 = 3000$. On a bien $u_0 \geqslant 1520$, $P(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $u_n \geqslant 1520$. Ainsi, $0.95u_n \geqslant 0.95 \times 1520$ et $0.95u_n + 76 \geqslant 0.95 \times 1520 + 76$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 1520$. $P(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   (b) Pour tout entier naturel n,

   $$u_{n+1} - u_n 0.95u_n + 76 - u_n = -0.05u_n + 76 = -0.05\left(u_n + \frac{76}{-0.05}\right) = -0{,}05(u_n - 1520)$$

   (c) Puisque pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1520$, on a $-0.05(u_n - 1520) \leqslant 0$. Ainsi, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.

   (d) La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

4. On désigne par (a_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $a_n = u_n - 1520$.

   (a) Pour tout entier naturel n,

   $$a_{n+1} = u_{n+1} - 1520 = 0.95u_n + 76 - 1520 = 0.95(a_n + 1520) + 76 - 1520 = 0.95a_n$$

   La suite (a_n) est donc géométrique de raison 0.95 et de premier terme $a_0 = u_0 - 1520 = 3000 - 1520 = 1480$.

   (b) Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n = 1480 \times 0.95^n$ et $u_n = a_n + 1520 = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$.

   (c) Puisque $-1 < 0.95 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.95^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1520$.

5. La fonction suivante, écrite en Python, détermine l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```python
def seuil():
  U = 3000
  N = 0
  while U > 2000 :
    N = N + 1
    U = 0.95 * U + 76
  return N
```

6. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1520$, et que la suite (u_n) est décroissante, il arrivera forcément un rang à partir duquel la suite sera sous 2000. Cela arrive au rang 22 : la réserve fermera donc en 2039.

► Exercice 2 — 7 points.

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.

Lors de la repousse, on modélise la longueur en centimètres de la queue du lézard en fonction du nombre de jours. Cette longueur est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 10e^{u(x)}$$

où u est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$u(x) = -\exp\left(2 - \frac{x}{10}\right)$$

où $\exp$ désigne la fonction exponentielle.

On admet que les fonctions u et f sont dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note u' et f' leurs fonctions dérivées respectives.

1. (a) On a $u = \exp(v)$ où $v : x \mapsto 2 - \dfrac{x}{10}$. Pour tout réel x positif, on a

$$u'(x) = v'(x) \times \exp(v(x)) = -\frac{1}{10}\exp(v(x)) = -\frac{1}{10}u(x)$$

(b) Pour tout réel positif x, on a

$$f'(x) = 10u'(x)e^{u(x)} = 10 \times \left(-\frac{1}{10}u(x)e^{u(x)}\right) = -u(x)e^{u(x)}$$

(c) Pour tout réel x, $e^{u(x)} > 0$ et $-u(x) = \exp\left(2 - \dfrac{x}{10}\right) > 0$. f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. (a) $f(20) = \dfrac{10}{e} \simeq 3.7$. Après 20 jours de repousse, la queue du lézard mesure environ 3.7 cm.

(b) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{x}{10}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0\,.Ainsi,$ $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 10e^0 = 10$.

(c) La fonction f est croissante et sa limite en $+\infty$ vaut 10. Elle ne peut donc atteindre 11. La queue du lézard ne peut pas atteindre 11cm selon cette modélisation.

3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale. On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$ On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f' et on admet que, pour tout réel x positif :

$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)\,e^{u(x)}(1+u(x))$$

   (a) Pour tout réel x, $e^{u(x)} > 0$ et $\frac{1}{10}u(x) < 0$. f'' est donc du signe opposé à celui de $(1+u(x))$. Or

$$1+u(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1-\exp\left(2-\frac{x}{10}\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 \leqslant \exp\left(2-\frac{x}{10}\right)$$

   et donc

$$1+u(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant 2-\frac{x}{10} \Leftrightarrow 20 \geqslant x$$

   Ainsi, $f''(x)$ est positive sur $[0;20]$ et négative sur $[20;+\infty[$. f' est donc croissante sur $[0;20]$ et décroissante sur $[20;+\infty[$.

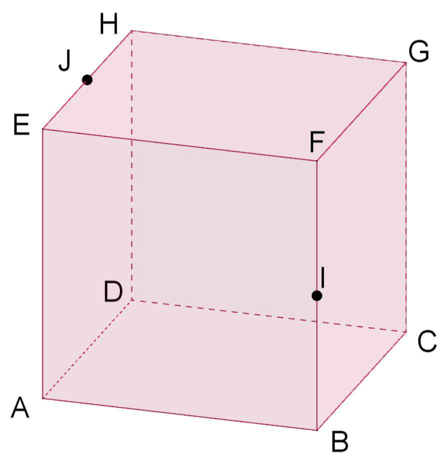
   (b) La vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale au bout de 20 jours.

► Exercice 3 — 4 points.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) de 8 questions. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est correcte.

Pour chaque question, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

Pour les questions 1 à 5, on se place dans le cube $ABCDEFGH$ suivant. On considère par ailleurs les points I et J, milieux respectifs des segments $[BF]$ et $[EH]$. L'espace est par ailleurs muni du repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE})$.



Question 1

L'intersection du plan (IAB) avec le plan (JDH) est...

A) la point A	B) la droite (EA)	C) la droite (IE)	D) ...vide

Question 2

Les droites (IJ) et (HB) sont...

A) non coplanaires	B) sécantes	C) parallèles	D) perpendiculaires

Question 3

Quelles sont les coordonnées du point I ?

A) $(2\,;\,0\,;1)$	B) $\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;0\right)$	C) $\left(1\,;\,0\,;\frac{1}{2}\right)$	D) $\left(0\,;\,1\,;\frac{1}{2}\right)$

Question 4

Laquelle de ces égalités vectorielles est vraie ?

A) $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{CH}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$	B) $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{HF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}$	C) $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$	D) $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{HF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$

Question 5

Le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ a pour coordonnées...

A) $\begin{pmatrix}0\\0{,}5\\1\end{pmatrix}$	B) $\begin{pmatrix}-1\\1\\0{,}5\end{pmatrix}$	C) $\begin{pmatrix}0{,}5\\-1\\1\end{pmatrix}$	D) $\begin{pmatrix}-1\\0{,}5\\1\end{pmatrix}$

Question 6

Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1-3^n}{1+2^n}$?

A) $-\infty$	B) -1	C) 1	D) $+\infty$

Question 7

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$ est

A) $y = ex + e$	B) $y = 2ex - e$	C) $y = 2ex + e$	D) $y = ex$

Question 8

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$ admet pour asymptote la droite d'équation

A) $x = -2$	B) $y = -1$	C) $y = -2$	D) $y = 0$