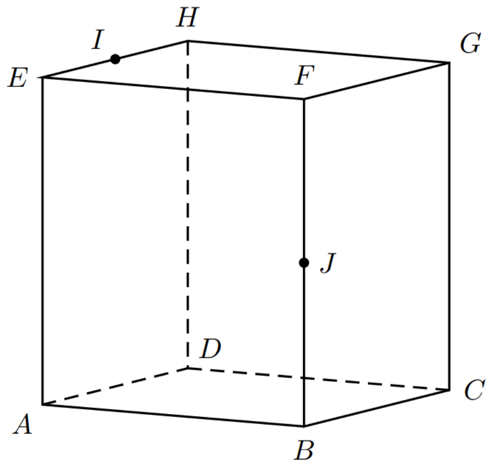
Devoir Surveillé 5

► Exercice 1

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ de côtés de longueur 1 représenté ci-dessous. On note I et J les milieux respectifs des segments $[EH]$ et $[FB]$.



L'espace est alors muni du repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE})$.

1. Donner, sans les justifier, les coordonnées des points I et J.
2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (BGI).

   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

   (c) On note K le milieu du segment $[HJ]$. Le point K appartient-il au plan (BGI) ?
3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.

   (a) En utilisant le triangle FIG pour base, montrer que le volume du tétraèdre $FBIG$ vaut $\dfrac{1}{6}$

   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

   (b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).

   (c) La droite Δ coupe le plan (BGI) en F'.
   Montrer que le point F' a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{9}\,;\,\dfrac{4}{9}\,;\,\dfrac{5}{9}\right)$

   (d) Calculer la longueur FF'. En déduire l'aire du triangle BGI.

► Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto 4x^3 - 12x^2 + 9x - 3$.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f'(x)$ pour tout réel x ?
2. Construire le tableau de variations de la fonction f. On y inclura les limites et extremums de la fonction f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution réelle. On note α cette solution.
4. Donner une valeur approchée de α au centième.

On considère désormais la fonction g définie pour tout réel x par

$$g(x) = \frac{12x^2 - 8x + 3}{1 + 4x^2}$$

ainsi que la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

On **admet** que la fonction g est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

5. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$
6. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
7. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
8. Montrer que pour tout réel x, $g(x) - x = -\frac{f(x)}{1 + 4x^2}$ où f est la fonction définie plus tôt.
9. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.