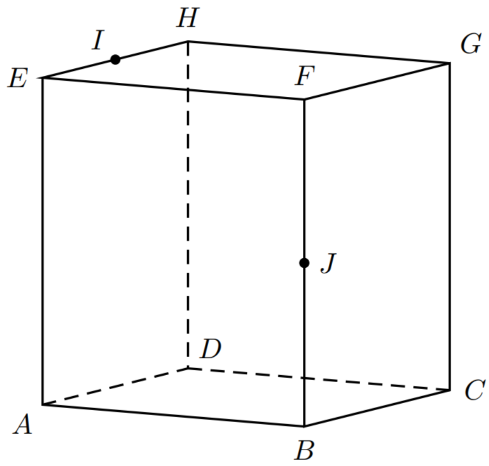
Devoir Surveillé 5

► Exercice 1

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ de côtés de longueur 1 représenté ci-dessous. On note I et J les milieux respectifs des segments $[EH]$ et $[FB]$.



L'espace est alors muni du repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE})$.

1. Le point I a pour coordonnées $\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$. Le point J a pour coordonnées $\left(1;0;\dfrac{1}{2}\right)$

2. (a) Le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1\end{pmatrix}$.

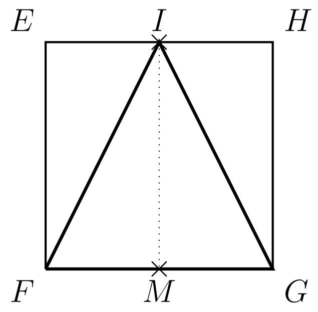
   Ainsi,
   - $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BG} = 1\times 0 - 2\times 1 + 2\times 1 = 0$
   - $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BI} = 1\times(-1) - 2\times 1/2 + 2\times 1 = 0$

   Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal a deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI). Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est donc normal au plan (BGI).

   (b) Le point $B(1{,}0{,}0)$ appartient au plan (BGI), qui admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ comme vecteur normal. Une équation cartésienne de ce plan est donc $(x-1)-2(y-0)+2(z-0) = 0$ soit $x-2y+2z-1=0$

   (c) On note K le milieu du segment $[HJ]$. Ce point a pour coordonnées $\left(\dfrac{0+1}{2};\dfrac{1+0}{2};\dfrac{1+\frac{1}{2}}{2}\right)$, c'est-à-dire $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$. Or, $\dfrac{1}{2}-2\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{3}{4}-1=0$. Les coordonnées du point K vérifient l'équation de (BGI). Le point K appartient donc au plan (BGI).

3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.
   (a) Le triangle FIG est isocèle en I. Notons M le milieu de $[FG]$. La hauteur issue de I dans le triangle FIG est donc la droite (IM). Il en vient que l'aire de ce triangle vaut $\dfrac{FG \times IM}{2}$ soit $\dfrac{1 \times 1}{2}$



   Dans le tétraèdre $FIGB$, la hauteur relative au triangle FIG est BF. Ainsi, le volume de ce tétraèdre vaut $\dfrac{\frac{1}{2} \times 1}{3} = \dfrac{1}{6}$

   (b) La droite Δ passant par $F(1{,}0{,}1)$ et orthogonale au plan (BGI). Elle est donc dirigée par le vecteur $\vec{n}$. Une représentation paramétrique de cette droite est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 1 + 2t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}$$

   (c) La droite Δ coupe le plan (BGI) en F'. On résout

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 1 + 2t \\ x - 2y + 2z - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 1 + 2t \\ 1 + t - 2t + 2(1 + 2t) - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = -2/9x = 1 - 2/9 \\ y = 4/9 \\ z = 5/9 \end{array}\right.$$

   Le point F' a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{9} ; \dfrac{4}{9} ; \dfrac{5}{9}\right)$

   (d) On a

$$FF' = \sqrt{\left(\frac{7}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{9} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{9} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{81} + \frac{16}{81} + \frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

   Or, en utilisant le triangle BGI comme base, la hauteur du tétraèdre $FGBI$ relative à cette base n'est autre que (FF'). Si on note A_{BGI} l'aire du triangle (BGI), il en vient que le volume du tétraèdre vaut $\dfrac{A_{BGI} \times FF'}{3}$ soit $\dfrac{2A_{BGI}}{9}$. Or, d'après les questions précédentes, ce volume vaut $\dfrac{1}{6}$. Ainsi, $A_{BGI} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{9}{2} = \dfrac{3}{4}$

► Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto 4x^3 - 12x^2 + 9x - 3$.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f'(x) = 12x^2 - 24x + 9$.
2. $f'(x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.
   Par ailleurs, les opérations sur les limites donnent $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. De plus, pour tout réel x non nul,
   $$f(x) = x^3\left(4 - \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$$
   et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
   Par ailleurs, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) = -3$. On en déduit le tableau suivant.

x	$-\infty$		$1/2$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

3. Pour tout réel $x \leqslant \frac{3}{2}$, on a $f(x) \leqslant -1$ et en particulier, $f(x) \neq 0$.
   Par ailleurs, f est continue sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$. On a également $f\left(\frac{3}{2}\right) = -3 < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède donc une solution sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$. De plus, la fonction f étant strictement monotone sur cet intervalle, cette solution est unique.
   Finalement, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.
4. On a $\alpha \simeq 2.10$.

On considère désormais la fonction g définie pour tout réel x par

$$g(x) = \frac{12x^2 - 8x + 3}{1 + 4x^2}$$

ainsi que la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

On **admet** que la fonction g est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

5. Pour tout réel non nul x,

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{12 - \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + 4} = \frac{12 - \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + 4}$$

Il en vient que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \frac{12}{4} = 3$

6. Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$ »
   - On a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. On a bien $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 3$
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$ La fonction g étant croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$, il en vient que $g\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(3)$ Or, $g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \geqslant \frac{1}{2}$ et $g(3) = \frac{87}{37} \leqslant 3$. Il en vient que $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3$. $P(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
7. La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.
8. Pour tout réel x,

$$g(x) - x = \frac{12x^2 - 8x + 3}{1 + 4x^2} - x = \frac{12x^2 - 8x + 3}{1 + 4x^2} - \frac{x(1 + 4x^2)}{1 + 4x^2}$$

   Ainsi,

$$g(x) - x = \frac{12x^2 - 8x + 3 - x - 4x^3}{1 + 4x^2} = \frac{-4x^3 + 12x^2 - 9x + 3}{1 + 4x^2} = -\frac{f(x)}{1 + 4x^2}$$

   $g(x) - x = -\frac{f(x)}{1 + 4x^2}$ où f est la fonction définie plus tôt.
9. Notons l la limite de la suite (u_n). Puisque pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$ et que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, il en vient que $g(l) = l$, ou encore que $g(l) - l = 0$. D'après la question précédente, cela signifie que $-\frac{f(l)}{1 + 4l^2} = 0$ et donc que $f(l) = 0$. Or, l'unique solution de cette équation est α. Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.