Rudiments de logique

1 Ensembles de nombres

1.1 Quelques notations

Définition 1 : Un ensemble est une collection d'objets. Celui-ci peut-être défini de plusieurs manières :

- **en extension** : cela revient à écrire les éléments que cet ensemble contient ;
- **en compréhension** : cela revient à décrire les éléments d'un ensemble à l'aide d'une condition que les éléments de l'ensemble, et uniquement eux respectent.

Donnons alors quelques notations communes qu'il est bon d'adopter dès à présent. Soit E un ensemble.

- **Appartenance à un ensemble** : on écrira $x \in E$ pour signifier que x est un élément de l'ensemble E et $x \notin E$ dans le cas contraire.
- **Ensemble privé d'un élément** : si x un élément de E, alors $E \setminus \{x\}$ (E privé de x) désigne l'ensemble de tous les éléments de E, sauf x.
- **Ensemble privé de 0** : Si $0 \in E$, on écrira souvent E^* pour désigner $E \setminus \{0\}$.
- **Ensemble vide** : Celui-ci se note $\varnothing$; c'est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

■ **Exemple 1 :** L'ensemble $E = \{1;7;\pi\}$ est écrit en extension. Il contient 3 éléments qui sont 1, 7 et π.

■ **Exemple 2 :** L'ensemble $F = \{n \in \mathbb{N} \,|\, 3n+2 > 11\}$ est décrit en compréhension. Il désigne l'ensemble de tous les entiers naturels n qui vérifient que $3n+2 > 5$. Par exemple,

- $7 \in F$: en effet, 7 est un entier naturel, $3 \times 7 + 2 = 23$ et $23 > 11$;
- $3 \notin F$: en effet, 3 est un entier naturel mais $3 \times 3 + 2 = 11$ qui n'est pas strictement supérieur à 11 ;
- $\dfrac{10}{3} \notin F$: en effet, $\dfrac{10}{3}$ n'est pas un entier naturel.

R Dans la définition $\{n \in \mathbb{N} \,|\, 3n+2 > 11\}$, le symbole $|$ se lit « tel que ». Il pourra parfois être remplacé par une virgule, qui peut aussi signifier « avec ».

■ **Exemple 3 :** L'ensemble des entiers pairs peut s'écrire par compréhension $\{2n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Définition 2 : Soit E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** de F si tout élément de E est aussi un élément de F. On notera $E \subset F$.

■ **Exemple 4 :** Soit $E = \{1;5;7\}$, $F = \{1;3;5;7;9\}$ et $G = \{2;5;7\}$.

- On a $E \subset F$ puisque les trois éléments de E sont aussi dans F ;
- En revanche, $E \not\subset G$ puisque $1 \in E$ mais $1 \notin G$.

1.2 Ensembles usuels

Définition 3 — Ensembles usuels : On dispose des ensembles de nombres suivants :

- $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels. $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;...\}$;
- $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs. $\mathbb{Z} = \{\ldots;-2;-1;0;1;2;\ldots\}$;
- $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres rationnels. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$;
- $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels.

Propriété 1 : On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Notation 1 — Intervalles de réels : Soit a et b deux réels, avec $a \leqslant b$. On notera

$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\} \qquad [a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x\}$$
$$]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leqslant b\} \qquad]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\}$$
$$[a;b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x < b\} \qquad]-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqslant b\}$$
$$]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\} \qquad]-\infty;b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\}$$

R On notera $\mathbb{R}_+$ l'intervalle $[0;+\infty[$ et $\mathbb{R}_-$ l'intervalle $]-\infty;0[$.
Notez par ailleurs que $\mathbb{R}^*$ n'est PAS un intervalle.

Notation 2 — Intervalles d'entiers : Soit a et b deux entiers relatifs tels que $a \leqslant b$.
On notera $[\![a;b]\!] = \{n \in \mathbb{N}, a \leqslant n \leqslant b\}$.

2 Raisonnement mathématiques

2.1 Un peu de vocabulaire

Définition 4 : Fixons un peu de vocabulaire pour commencer.

- Une **définition** permet de nommer des objets ou des propriétés mathématiques, ce qui permet d'y faire référence facilement ;
- Une **proposition** (ou **assertion**) est un énoncé mathématiques qui peut être soit vrai, soit faux ;
- Une **démonstration** est une succession d'énoncés mathématiques reliés par des liens logiques, partant d'énoncés vrais (appelés **prémisses**) et aboutissant à une conclusion ;
- Un **théorème** est une proposition vraie qui a été démontrée ;
- Une **conjecture** est une proposition que l'on suppose vraie mais qui n'a pas été démontrée.

■ **Exemple 5 :**
- « 3 est un entier naturel » est une proposition vraie.
  « 23 est le carré d'un nombre entier » est une proposition fausse.
- « Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit » est un théorème bien connu qui porte le nom de théorème de Pythagore.
- La conjecture de Goldbach affirme que « Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers ». On la pense vraie (elle a d'ailleurs été vérifiée pour des nombres très grands) mais aucune démonstration de ce résultat n'a été fournie à ce jour.

R Les énoncés que nous nommerons « Propriété » tout au long de ce cours seront en fait des théorèmes. Le nom de théorème est en général utilisé pour désigner un résultat particulièrement important et puissant. Il sera donc d'autant plus important de les connaître sur le bout des doigts.

2.2 Propositions

Négation

Définition 5 — Négation : La **négation** d'une proposition $\mathcal{P}$ est la proposition qui est vraie quand $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse quand $\mathcal{P}$ est vraie.

On la note $\text{NON}(\mathcal{P})$ ou $\neg\mathcal{P}$.

■ **Exemple 6 :** Soit x un réel. La négation de $x^2 \geqslant 1$ est $x^2 < 1$.

Conjonction et disjonction

Définition 6 — Conjonction et disjonction : Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- La proposition « $\mathcal{P}$ OU $\mathcal{Q}$ » est la proposition qui est vraie lorsque l'une des propositions $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie (éventuellement les deux) et qui est fausse sinon ;
- La proposition « $\mathcal{P}$ ET $\mathcal{Q}$ » est la proposition qui est vraie lorsque les deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies et qui est fausse sinon ;

Propriété 2 : Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- La négation de « $\mathcal{P}$ OU $\mathcal{Q}$ » est « $\text{NON}(\mathcal{P})$ ET $\text{NON}(\mathcal{Q})$ » ;
- La négation de « $\mathcal{P}$ ET $\mathcal{Q}$ » est « $\text{NON}(\mathcal{P})$ OU $\text{NON}(\mathcal{Q})$ » .

■ **Exemple 7 :** Dans un parc d'attractions, un certain manège demande, pour pouvoir monter, d'avoir 18 ans ou plus ET de mesurer 1m50 au moins.

Ainsi, l'accès à ce manège est refusé si la personne a strictement moins de 18 ans OU si elle mesure strictement moins de 1m50.

■ **Exemple 8 :** Soit x un réel.
La négation de « $x < 1$ OU $x \geqslant 3$ » est « $x \geqslant 1$ ET $x < 3$ », ce qui se réécrit « $1 \leqslant x < 3$ ».

Implication et équivalence

Définition 7 — Implication et équivalence : Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- On dit que $\mathcal{P}$ **implique** $\mathcal{Q}$ lorsque « si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie ».
  On écrira $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.
- On dit que $\mathcal{P}$ **équivaut à** $\mathcal{Q}$ lorsque « $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ ET $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ ».
  On écrira $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$.

R Les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sont des notations mathématiques et non des abréviations.
Il est absolument malvenu de les utiliser lors de phrases écrites en français.
Par ailleurs, le symbole $\Rightarrow$ n'est pas synonyme de « donc » !

Dans l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une **condition suffisante** (CS) de $\mathcal{Q}$: il suffit de vérifier que $\mathcal{P}$ est vraie pour savoir que $\mathcal{Q}$ est vraie.

Inversement, dans cette implication, on dit que $\mathcal{Q}$ est une **condition nécessaire** (CN) de $\mathcal{P}$: la proposition $\mathcal{P}$ ne peut pas être vraie si $\mathcal{Q}$ ne l'est pas.

Ainsi, dans une équivalence $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire et suffisante (CNS) de $\mathcal{Q}$.

■ **Exemple 9 :** Soit x un réel, $\mathcal{P}$ la proposition $x > 0$ et $\mathcal{Q}$ la proposition $x \geqslant 1$.

On a l'implication logique $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

- Si un réel est supérieur ou égal à 1, alors ce réel est **nécessairement** strictement positif ;
- Si on a montré qu'un réel était supérieur ou égal à 1, cela **suffit** à montrer qu'il est strictement positif.

En revanche, on n'a pas l'implication réciproque $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.
En effet, si $x = \frac{1}{2}$, alors $\mathcal{P}$ est vraie mais $\mathcal{Q}$ ne l'est pas.

■ **Exemple 10 :** Soit ABC un triangle.
On considère les propositions $\mathcal{P}$: « ABC est rectangle en A » et $\mathcal{Q}$: « $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ».

On a l'équivalence $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$.

Propriété 3 : Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

La négation de « $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ » est « $\mathcal{P}$ ET NON$(\mathcal{Q})$ ».

Pour prouver que la proposition « Si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie » est fausse, il suffit de déterminer un cas où $\mathcal{P}$ est vraie mais pour lequel $\mathcal{Q}$ est fausse.

■ **Exemple 11 :** Soit x un réel, $\mathcal{P}$ la proposition $2x - 5 < 0$ et $\mathcal{Q}$ la proposition $6x + 3 > 0$.

L'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est fausse : en effet, prenons $x = -1$. On a alors $2x - 5 = -7 < 0$ mais $6x + 3 = -3 \leqslant 0$.
Ainsi, $\mathcal{P}$ est vraie, mais $\mathcal{Q}$ est fausse, l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est donc fausse.

2.3 Quantificateurs

Définition 8 — Quantificateurs : Soit $\mathcal{P}$ une proposition qui porte sur les éléments d'un ensemble E.

- « $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ » signifie : tous les éléments de E vérifient la proposition $\mathcal{P}$.
  Le symbole $\forall$ est le quantificateur universel et se lit « pour tout » ou « quel que soit ».
- « $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ signifie : il existe (au moins) un élément de E qui vérifie la proposition $\mathcal{P}$.
  Le symbole $\exists$ est le quantificateur existentiel et se lit « il existe ».
- « $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$ signifie : il existe un unique élément de E qui vérifie la proposition $\mathcal{P}$.

R Là encore, les quantificateurs sont des notations mathématiques et non des abréviations.

■ **Exemple 12 :** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

- La phrase « la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}$ » s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
- La phrase « la fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$ » s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

Attention à l'ordre des quantificateurs ! Tout ce qui est placé dans une phrase mathématique dépend (potentiellement) de ce qui vient avant.

■ **Exemple 13 :** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

- La phrase « $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a$ » signifie qu'il existe un réel a tel que, pour tout réel x, on a $f(x) = a$. Ce a est donc le même pour tous les réels x : la fonction f est constante ;
- En revanche, la phrase $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}, f(x) = a$ » indique que pour tout réel x, il existe un réel a, qui

dépend donc potentiellement de x, et tel que $f(x) = a$: on traduit ici le fait que tout réel admet une image par la fonction f... mais cette image n'est pas la même pour tous les réels.

Propriété 4 : Soit $\mathcal{P}$ une proposition qui porte sur les éléments d'un ensemble E.

- La négation de « $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ » est « $\exists x \in E, \text{NON}(\mathcal{P}(x))$ ».
- La négation de « $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ » est « $\forall x \in E, \text{NON}(\mathcal{P}(x))$ ».

■ **Exemple 14 :** Soit (u_n) une suite numérique.

Dire que la suite (u_n) est décroissante s'écrit : « $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n$ ».
Sa négation s'écrit donc : « $\exists n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$ ».

Considérons alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \dfrac{3+(-1)^n}{2n}$.

On a $u_1 = \dfrac{3-1}{2\times 1} = 1$, $u_2 = \dfrac{3+1}{2\times 2} = 1$, $u_3 = \dfrac{3-1}{2\times 6} = \dfrac{1}{3}$, $u_4 = \dfrac{3+1}{2\times 4} = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, pour $n = 3$, on a $u_{3+1} > u_3$. On a donc prouvé que la suite (u_n) n'est pas croissante.

3 Méthodes de rédaction

3.1 Pourquoi rédiger ?

Même si la rédaction paraît parfois superflue, il faut retenir le principe suivant :

Rédiger permet de structurer la pensée.

Il est donc important d'ancrer de bonnes habitudes de rédaction pour que celle-ci prenne le relais d'un éventuel manque d'inspiration dans le cas d'exercices plus théoriques ou plus difficiles ; mais également pour que celle-ci vous permette de repérer des erreurs de raisonnements...

C'était la première (et peut-être la meilleure ?) raison de bien rédiger.

La seconde est nettement plus intéressée sans doute : la rédaction est évaluée ! En effet, un vocabulaire approprié, une rédaction rigoureuse et claire, ainsi qu'une copie soignée seront des critères importants d'évaluation.

C'est ce qui fait souvent la différence entre une « copie correcte » et une « bonne copie ».

Donnons déjà les quatre commandements de la bonne rédaction :

1. **Tout objet dont tu parleras, au préalable tu introduiras.**
   Que signifie la phrase « Ils les lui ont volées. » ? On n'en sait rien, puisqu'on ne sait pas ce que désignent « ils », « les », « lui »... Bref, en mathématiques, c'est pareil : on ne peut pas saisir le sens de la phrase « $x^2 = x$ » si on ne sait pas ce que désigne x. On ne peut donc pas savoir si elle est vraie, ou fausse, ou s'il s'agit de déterminer quand elle est vraie...
2. **Ce que tu fais, tu expliqueras.**
   Des petites expressions comme "Montrons que", "Transformons le problème", "Résolvons"... seront utiles pour que vous et moi comprenions bien ce que vous êtes en train de faire. Ne lésinez pas sur les mots de liaison et ne vous contentez pas de pages de calculs indigestes.
3. **Les arguments utilisés, tu mentionneras.**
   Pour vous, il s'agit de vous assurer que ce que vous faites est correct... Pour moi, il s'agit de vérifier que vous avez bien saisi les subtilités du raisonnement.

4. **Tes résultats, en évidence tu mettras.**
   Il s'agit essentiellement de vous assurer que vous avez bien répondu à l'intégralité de la question, mais aussi de mettre en évidence un résultat qui pourra vous être utile dans la suite

Pour achever de vous convaincre qu'il ne s'agit pas simplement d'un caprice de votre professeur, voici des extraits du rapport de jury du concours ECRICOME, que vous serez amenés à passer en fin d'année prochaine.

> Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
>
> Le soin apporté aux copies est très variable [...] Les quelques candidats qui ne réalisent pas cet effort ne pourront qu'être évalués sévèrement. On demande en particulier aux candidats d'écrire suffisamment gros, d'aérer leur copie, de séparer clairement les blocs de calculs des blocs de rédaction, d'aligner ces blocs de calculs (sans zig-zags) et d'encadrer (si possible en couleur) leurs conclusions.
>
> [...] Certains candidats ne concluent pas explicitement à chaque question (il suffit pourtant de reprendre l'intitulé de la question, en encadrant ou soulignant la phrase). Or, dans bien des cas, les réponses sont imprécises, et le correcteur est alors en droit de se demander si le candidat est réellement sûr d'avoir conclu, ou s'il a plutôt abandonné la question en cours de route. Ce doute profite malheureusement rarement au candidat.

3.2 Exemples de rédaction

Méthode 1 : Pour démontrer une assertion universelle « $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ », on écrit :
Soit $x \in E$, (montrons que $\mathcal{P}(x)$)
Puis on effectue les étapes nécessaires pour établir $\mathcal{P}(x)$.

■ **Exemple 15 :** Démontrer l'identité de Legendre :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, (a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2+b^2)$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 - (a-b)^4 &= ((a+b)^2)^2 - ((a-b)^2)^2 \\
&= ((a+b)^2 - (a-b)^2)((a+b)^2 + (a-b)^2) \\
&= (a^2+2ab+b^2 - (a^2-2ab+b^2))(a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2) \\
&= 4ab(2a^2+2b^2) \\
&= 4ab \times 2(a^2+b^2) \\
&= 8ab(a^2+b^2).
\end{aligned}$$

Conclusion : on a montré : $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2+b^2)$.

Méthode 2 : Pour démontrer une assertion existentielle « $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$, on écrit :
Posons $x = \ldots$, (il faut donc avoir une idée, potentiellement en utilisant un théorème)
Puis on montre que $x \in E$ et que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

■ **Exemple 16 :** Montrons qu'il existe un entier naturel n tel que $2^n < n^2$.

Posons $n = 3$. On a bien $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, $2^n = 2^3 = 8$ et $n^2 = 3^2 = 9$.

Or, $8 < 9$. Par conséquent, on a bien $2^n < n^2$.

Conclusion : il existe un entier naturel n (en l'occurrence, 3) tel que $2^n < n^2$.

R Peut-être existe-t-il d'autres entiers naturels vérifiant cette propriété ? Toutefois, afin de montrer une proposition existentielle, un seul exemple suffit. Attention à ne pas vouloir trop en faire.

♥ **Méthode 3 :** Pour montrer qu'une assertion universelle est fausse :

- on écrit la négation de cette proposition ;
- on utilise la méthode pour démontrer une proposition existentielle. L'élément trouvée est appelé **contre-exemple**.

Pour montrer qu'une assertion existentielle est fausse :

- on écrit la négation de la proposition ;
- on utilise la méthode pour démontrer une proposition universelle.

R Il faut simplement retenir que montrer qu'une proposition est fausse revient à montrer que sa négation est vraie.

4 Raisonnements mathématiques

4.1 Raisonnement direct

Le raisonnement direct est en général le premier que l'on essaie, et c'est celui que nous avons systématiquement utilise jusqu'ici dans ce chapitre. Il consiste à partir d'une proposition $\mathcal{P}$ que l'on suppose vraie puis, à l'aide de calculs ou de l'utilisation de théorèmes, établir que la proposition $\mathcal{Q}$ est également vraie.

♥ **Méthode 4 :** Pour démontrer une implication « $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ », on écrit :
Supposons que $\mathcal{P}$ (et montrons $\mathcal{Q}$)...
Puis on effectue les étapes nécessaires afin d'établir $\mathcal{Q}$.

■ **Exemple 17 :** Montrons que la somme de deux entiers pairs est un entier pair.

Dans un premier temps, nous pouvons reformuler cette proposition en terme d'implication : si a et b sont deux entiers pairs, alors $a+b$ est un entier pair.

Soit donc $a, b \in \mathbb{Z}$. Supposons que a et b sont pairs. On pose alors k et l deux entiers relatifs tels que $a = 2k$ et $b = 2l$. Alors,

$$a + b = 2k + 2l = 2(k + l).$$

Or, $k + l \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $a + b$ est un entier pair.

Conclusion : la somme de deux entiers pairs est un entier pair.

4.2 Raisonnement par contraposée

Propriété 5 : Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

Démontrer l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est équivalent à démontrer l'implication contraposée $\text{NON}(\mathcal{Q}) \Rightarrow \text{NON}(\mathcal{P})$.

■ **Exemple 18 :** Montrons que pour tout entier naturel n, si n^2 est pair, alors n est pair.

Nous allons procéder par contraposée en démontrant que, pour tout entier naturel n, si n est impair, alors n^2 est impair.

Il s'agit d'une proposition universelle : soit n un entier impair. On pose alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$. Ainsi,

$$n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Si l'on pose $m = 2k^2 + 2k$, on a alors $m \in \mathbb{Z}$ et $n^2 = 2m+1$. n^2 est donc un entier impair.

Conclusion : par contraposée, si n^2 est un entier pair, alors n est un entier pair.

4.3 Raisonnement par l'absurde

Dans une démonstration par l'absurde, on suppose le contraire de ce que l'on veut démontrer. En déroulant alors les étapes de calcul et de raisonnement, on aboutit alors à un résultat faux ou une contradiction : cela signifie que l'hypothèse que nous avions faite au départ n'avait rien de raisonnable et était en fait fausse.

Le raisonnement par l'absurde est souvent utilisé lorsqu'il est plus facile de décrire la négation d'une proposition que la proposition elle-même.

■ **Exemple 19 :** Montrons que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Un raisonnement direct paraît peu approprié ici : il existe beaucoup de nombres décimaux, de formes diverses et variées. C'est pourquoi la stratégie de la démonstration par l'absurde peut nous paraître adapté. Il est, dans notre cas, très simple de décrire le contraire de ce que l'on veut démontrer.

Supposons donc que $\frac{1}{3}$ est décimal. Cela signifie que l'on peut se fixer $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^b}$.

Nous avons alors $10^b = 3a$. Ainsi, puisque $a \in \mathbb{Z}$, cela signifie que 10^b est un multiple de 3.

Or, un nombre est un multiple de 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 3. Pourtant, la somme des chiffres de 10^b vaut 1. 10^b n'est donc pas un multiple de 3.

Nous aboutissons à une contradiction. Notre résultat de départ, à savoir que $\frac{1}{3}$ est décimal, est donc faux.

Conclusion : Nous avons montré que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

4.4 Raisonnement pas analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse peut être utilisé lorsque l'on cherche des solutions à certains types d'équations ou lorsque l'on recherche des objets mathématiques vérifiant certaines propriétés.

- Dans un premier temps, nous cherchons les potentiels candidats solutions de notre problème. Nous établissons là une condition nécessaire pour répondre à la question posée.
- Dans un second temps, on examine les candidats restants et on détermine ceux qui sont en effet solutions de notre problème.

■ **Exemple 20 :** Déterminons tous les réels positifs tels que $x-2=\sqrt{x}$.

- **Analyse** : Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Supposons que $x-2=\sqrt{x}$. On a alors $(x-2)^2 = x$ et donc $x^2-4x+4=x$. Ainsi, $x^2-5x+4=0$. Il s'agit d'une équation du second degré dont les solutions sont 1 et 4.
- **Synthèse** : Nous vérifions si les réels 1 et 4 sont solutions de notre équation.
  - Pour $x=1$, on a $\sqrt{1}=1$ et $1-2=-1$. Ainsi, $\sqrt{1} \neq 1-2$.
    1 n'est donc pas solution de notre équation ;
  - Pour $x=4$, on a $\sqrt{4}=2$ et $4-2=2$. Ainsi, $\sqrt{4}=4-2$.
    4 est donc solution de notre équation.

Conclusion : L'équation $\sqrt{x}=x-2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. Celle solution est 4.

4.5 Démonstration par récurrence

Exemple introductif : On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

A l'aide de cette expression, il est possible de calculer les termes de la suite de proche en proche.

- $u_1 = \dfrac{u_0}{1+u_0} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.
- $u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}$.
- ...

Toutefois, il n'est pas possible de calculer u_{50} sans calculer tous les termes précédents... On souhaiterait donc déterminer une expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

D'après les premiers termes de notre suite, il semblerait que pour tout entier naturel n, on ait $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Cette formule fonctionne pour les rangs 0, 1, 2 et 3 mais qu'en est-il pour le reste ?

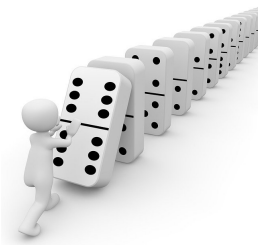
Un moyen de s'assurer que cette formule fonctionne pour tous les rangs est de la démontrer par récurrence.

Propriété 6 — Principe de récurrence simple : Soit $\mathcal{P}$ une proposition qui porte sur l'ensemble des entiers naturels n et n_0 un entier fixé.

On suppose que les deux conditions suivantes sont réunies :

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (initialisation) ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, $(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$ (hérédité) ;

Alors on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$. La propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers $n \geqslant n_0$.



Le principe du raisonnement par récurrence rappelle les dominos que l'on aligne et que l'on fait tomber, les uns à la suite des autres.

On positionne les dominos de telle sorte que, dès que l'un tombe, peu importe lequel, il entraîne le suivant dans sa chute. C'est **l'hérédité**. Seulement, encore faut-il faire effectivement tomber le premier domino, sans quoi rien ne se passe : c'est **l'initialisation**.

Si ces deux conditions sont remplies, on est certain qu'à la fin, tous les dominos seront tombés : c'est notre **conclusion**.

Méthode 5 : Pour tout entier n, on introduit proprement et très clairement la proposition $\mathcal{P}(n)$ que nous souhaitons démontrer. La démonstration par récurrence comporte trois étapes :

- **Initialisation** : On vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ;
- **Hérédité** : On démontre ici une implication universelle.
  On écrit donc « Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. »
  ou « Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. »
  *Puis on effectue les étapes nécessaires afin d'établir $\mathcal{P}(n+1)$ en utilisant $\mathcal{P}(n)$, que l'on appelle **hypothèse de récurrence**.*
- **Conclusion** : on en conclut, **en mentionnant explicitement le principe de récurrence**, que pour tout entier $n \geqslant n_0$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

■ **Exemple 21 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ ».

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $\dfrac{1}{0+1} = \dfrac{1}{1} = 1$. On a donc bien $u_0 = \dfrac{1}{0+1}$.
  La propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. A partir de ce résultat, on souhaite démontrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1+1} = \dfrac{1}{n+2}$.
  Nous avons donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Or, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Ainsi,

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+\frac{n+1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

  On trouve bien que $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1+1}$: $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.

Par principe de récurrence, nous avons montré que pour tout entier naturel n, on a bien $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Dans certain cas, la récurrence simple ne peut être utilisée, car il nous faut des informations sur deux rangs, ou plus. D'autres formes de raisonnement par récurrence peuvent éventuellement être appliqués.

Propriété 7 — Principe de récurrence double : Soit $\mathcal{P}$ une proposition qui porte sur l'ensemble des entiers naturels n et n_0 un entier fixé.

On suppose que les deux conditions suivantes sont réunies :

- $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies (initialisation) ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, $(\mathcal{P}(n)$ ET $\mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2))$ (hérédité) ;

Alors on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$. La propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers $n \geqslant n_0$.

■ **Exemple 22 :** On considère la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Nous allons montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 1 + 2^n$.

Pour tout entier naturel n, on définit $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 1 + 2^n$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $1 + 2^0 = 1 + 1 = 2$ et $u_0 = 2$. Ainsi, $u_0 = 1 + 2^0$.
  pour $n = 1$, on a $1 + 2^1 = 1 + 2 = 3$ et $u_1 = 3$. Ainsi, $u_1 = 1 + 2^1$.
  $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont donc vraies.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. On a
  $$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &= 3(1+2^{n+1}) - 2(1+2^n) \qquad \text{[Par hypothèse de récurrence]} \\ &= 3 + 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 2^n \\ &= 1 + 3 \times 2^{n+1} - 2^{n+1} \\ &= 1 + 2 \times 2^{n+1} \\ &= 1 + 2 \times 2^{n+2}. \end{aligned}$$
  Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a montré : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

4.6 Raisonnement par disjonction de cas

Lorsque l'on souhaite démontrer qu'une proposition $\mathcal{P}$ définie sur un ensemble E est vraie pour tout élément de cet ensemble, on peut partitionner l'ensemble E en plusieurs sous-ensembles sur lesquels nous démontrer que la proposition $\mathcal{P}$ est vraie.

Nous verrons ce type de démonstration plus en détails dans le prochain chapitre, lorsque nous aborderons les valeurs absolues.

■ **Exemple 23 :** Montrons que pour tout entier relatif n, le réel $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier relatif.

Nous séparerons notre démonstration en deux cas.

- Supposons que n est pair : nous pouvons alors fixer $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Alors
  $$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$$
  qui est bien un entier.
- Supposons que n est impair : nous pouvons alors fixer $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$. Alors
  $$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+1+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = \frac{2(2k+1)(k+1)}{2} = (2k+1)(k+1)$$
  qui est bien un entier.

Nous avons couvert l'ensemble des cas possibles, un entier étant forcément soit pair, soit impair, et nous avons montré que dans chacun de ces cas, la proposition était vraie.

Conclusion : Nous avons montré que pour tout entier relatif n, le réel $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier relatif.