Exercices : rudiments de logique

► Exercice 1 : Ensembles – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivants, compléter les pointillés à l'aide du symbole $\in$ ou $\notin$. Justifier chaque réponse.

$-3 \quad \dots \quad \mathbb{Q}$	$2 \quad \dots \quad]\sqrt{2};\sqrt{3}]$	$5 \quad \dots \quad \{x \in \mathbb{R} \mid 2x+3 > 10\}$
$-7 \quad \dots \quad \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \geqslant 25\}$	$\frac{2}{5} \quad \dots \quad \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < x\}$	$-1 \quad \dots \quad \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x\}$

► Exercice 2 : Ensembles encore – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivants, compléter les pointillés à l'aide du symbole $\in$ ou $\notin$. Justifier chaque réponse.

$(2;3) \quad \dots \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \geqslant 10\}$	$\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right) \quad \dots \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$
$(1;1;1) \quad \dots \quad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z = 0\}$	$(2;1;3) \quad \dots \quad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z \leqslant 4\}$

► Exercice 3 : Négations – Voir le corrigé

Donner la négation des propositions suivantes

- Tous les élèves de la classe ont eu leur bac.
- Le temps est froid et pluvieux.
- Tout résultat sur la copie a été encadré ou souligné.

► Exercice 4 : Quantificateurs – Voir le corrigé

Traduire à l'aide de quantificateurs les énoncés suivants.

- Quel que soit le réel considéré, on peut trouver un autre réel qui lui est strictement inférieur ;
- Pour tout réel non nul, un peut trouver un autre réel tel que le produit de ces deux réels vaut 1 ;
- Tout entier naturel peut s'écrire comme la somme de quatre carrés d'entiers naturels ;
- Si un réel est compris entre 0 et 1, alors il est supérieur ou égal à son carré.

► Exercice 5 : Négation et quantificateurs – Voir le corrigé

Dans les énoncés suivants, f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et (u_n) désigne une suite numérique. Écrire la négation des propositions suivantes.

1. $x > 3$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$;
3. $\exists n \in \mathbb{N} \mid u_n = 3$;
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \mid x^n \geqslant 2025$;
5. $\forall a,b \in \mathbb{R}, (a \leqslant b) \Rightarrow (f(a) \leqslant f(b))$;
6. $\exists \ell \in \mathbb{R}, \mid \forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N) \Rightarrow (u_n - \ell \geqslant A)$.

► Exercice 6 : Vrai ou faux ? – Voir le corrigé

Parmi les propositions suivantes, déterminer celles qui sont fausses à l'aide d'un contre-exemple. Démontrer celles qui sont vraies.

- $\mathcal{P}_1$: « Le produit de deux entiers impairs est un entier impair » ;
- $\mathcal{P}_2$: « La somme de deux nombres rationnels non entier n'est jamais un nombre entier » ;
- $\mathcal{P}_3$: « Pour tous réels x et y, si $x < y$, alors $x^2 < y^2$ » ;
- $\mathcal{P}_4$: « Pour tous réels positifs x et y, si $x < y$, alors $x^2 < y^2$ ».

► Exercice 7 : Par contraposée – Voir le corrigé

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathbb{R}_+$, et a_1, a_2, ..., a_N des réels. On considère la proposition $\mathcal{P}$ suivante ;

$$\mathcal{P} \ : \ (a_1 + \ldots + a_N \geqslant M) \Rightarrow \left(\exists i \in [\![1, \ldots, N]\!] \mid a_i \geqslant \frac{M}{N}\right)$$

1. Traduire « en français » cette proposition.
2. Quelle est la contraposée de $\mathcal{P}$?
3. Démontrer la proposition $\mathcal{P}$ par contraposée.

► Exercice 8 : Avec des rationnels – Voir le corrigé

Montrer par contraposée que si la somme de deux nombres est irrationnelle, alors l'un de ces deux nombres au moins est irrationnel.

► Exercice 9 : Vraiment très petit – Voir le corrigé

Soit $a \in \mathbb{R}$, Montrer par contraposée le résultat suivant

$$(\forall \varepsilon > 0, |a| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow a = 0$$

On rappelle que $|a|$ vaut a si a est positif et vaut $-a$ sinon.

► Exercice 10 : Des tiroirs et des chaussettes – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel non nul. Démontrer par l'absurde que si l'on range $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes. Il n'est pas permis de dépareiller les paires de chaussettes, c'est déjà suffisamment pénible à faire comme ça !

► Exercice 11 : Une somme absurde – Voir le corrigé

Soit a_1, a_2, ..., a_9 des entiers naturels tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = 90$.

On souhaite démontrer la proposition $\mathcal{P}$ suivante : « il existe trois éléments parmi les a_i dont la somme est supérieure ou égale à 30 ».

1. Écrire la négation de la proposition $\mathcal{P}$.
2. Démontrer la proposition $\mathcal{P}$ par l'absurde.

► Exercice 12 : Une égalité – Voir le corrigé

Soit x et y deux réels positifs tels que $\dfrac{x}{1+y} = \dfrac{y}{1+x}$. On souhaite montrer par l'absurde que $x = y$.

1. Quelle hypothèse doit-on faire dans le cadre de la démonstration par l'absurde pour montrer ce résultat ?
2. Montrer que $x^2 - y^2 = -(x-y)$.
3. En déduire que $x + y = -1$ et conclure.

► Exercice 13 : Analyse-synthèse – Voir le corrigé

L'objectif de l'exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

1. Nous allons commencer par déterminer les fonctions candidates.
   Soit f une fonction solution du problème.
   (a) En prenant $x = y = 0$, déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.
   (b) En prenant $x = 1$ et $y = 0$, déterminer la valeur de $f(0)$.
   (c) En prenant x quelconque et $y = 0$, déterminer les potentielles solutions de cette équation.
2. Vérifier si la (ou les) fonction(s) trouvée(s) précédemment convien(nen)t et conclure.

► Exercice 14 : Encore de l'analyse-synthèse – Voir le corrigé

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions affines f vérifiant :

$$(E) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = x$$

1. Soit f une fonction affine, a et b des réels tels que, pour tout réel x, $f(x) = ax + b$.
   (a) Exprimer $f(f(x))$ en fonction de a, x et b pour tout réel x.
   (b) En déduire que, si f est solution de (E), alors ($a = 1$ et $b = 0$) ou $a = -1$.
2. Vérifier si les solutions ainsi trouvées conviennent et conclure.

► Exercice 15 : Terme général d'une suite récurrente – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 12$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 8$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 4 + 8 \times 3^n$.

► Exercice 16 : Minoration d'une suite – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}\, u_n + 8$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 10$.

► Exercice 17 : Conjecture du terme général – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel non nul n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}.$$

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel non nul n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

► Exercice 18 : Une somme bien connue – Voir le corrigé

Soit q un réel différent de 1, n un entier naturel et $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.
L'objectif de cet exercice est de rappeler la valeur de S, déjà vue en classe de première.

1. Que vaut $(1-q)S$? En déduire la valeur de S.
2. Redémontrer ce résultat par récurrence.

► Exercice 19 : Inégalité de Bernoulli – Voir le corrigé

Soit a un réel strictement positif. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

► Exercice 20 : Suite récurrente d'ordre 2 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = (1-n)2^n$.

► Exercice 21 : Une autre suite d'ordre 2 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = -1 + n(n-1)$.

► Exercice 22 : De deux manières... – Voir le corrigé

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n^2 + n$ est pair.
2. Montrer ce même résultat par disjonction de cas.

Corrections

► Correction 1 – Voir l'énoncé

- On a $-3 \in \mathbb{Q}$. En effet, $-3 = \dfrac{-3}{1}$ s'écrit donc comme le quotient d'un entier relatif par un entier naturel.
- On a $2 \notin]\sqrt{2};\sqrt{3}]$. En effet, $2 > \sqrt{3}$.
- On a $5 \in \{x \in \mathbb{R} \,|\, 2x+3 > 10\}$. En effet, $5 \in \mathbb{R}$ et $2 \times 5 + 3 = 13 > 10$.
- On a $-7 \notin \{n \in \mathbb{N} \,|\, n^2 \geqslant 25\}$ puisque $-7 \notin \mathbb{N}$.
- On a $\dfrac{2}{5} \in \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < x\}$.

  En effet, on a $\dfrac{2}{5} \in \mathbb{Q}$ et $\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = \dfrac{4}{25}$. Or, $\dfrac{2}{5} = \dfrac{10}{25}$ et donc $\dfrac{4}{25} < \dfrac{2}{5}$ soit $\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 < \dfrac{2}{5}$.
- On a $-1 \notin \{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists y \in \mathbb{R},\, y^2 = x\}$. En effet, pour tout réel y, $y^2 \geqslant 0$ et donc on ne peut pas avoir $y^2 = -1$.

► Correction 2 – Voir l'énoncé

- On a $2^2 + 3^2 = 13 \geqslant 10$. Ainsi, $(2;3) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \geqslant 10\}$;
- On a $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{3}{4}$. Ainsi, $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right) \notin \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > y\}$;
- On a $1 + 1 - 2 \times 1 = 0$. Ainsi, $(1;1;1) \in \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y - 2z = 0\}$
- On a $2 + 3 = 5 > 4$. Ainsi, $(2;1;3) \notin \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + z \leqslant 4\}$

► Correction 3 – Voir l'énoncé

- La négation de "Tous les élèves de la classe ont eu leur bac" est "il y a un élève de la classe qui n'a pas eu son bac".
- La négation de "Le temps est froid et pluvieux" est "Le temps est chaud ou non pluvieux".
- La négation de "Tout résultat sur la copie a été encadré ou souligné" est "Il y a un résultat sur la copie qui n'a pas été encadré ou qui n'a pas été souligné".

► Correction 4 – Voir l'énoncé

On a les traductions suivantes

- $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R} \,|\, y < x$;
- $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R} \,|\, xy = 1\}$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N} \,|\, n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, x \in [0;1] \Rightarrow x \geqslant x^2$.

► Correction 5 – Voir l'énoncé

1. $x \leqslant 3$;
2. $\exists x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) = 0$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 3$;
4. $\exists x \in \mathbb{R} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, x^n < 2025$;
5. $\exists a, b \in \mathbb{R} \,|\, (a \leqslant b)$ ET $(f(a) > f(b))$;
6. $\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists A > 0 \,|\, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \,|\, (n \geqslant N)$ ET $(u_n - \ell < A)$.

► Correction 6 – Voir l'énoncé

- La proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie. Soit n et p deux nombres entiers impairs. Posons alors k et l tels que $n = 2k+1$ et $p = 2l+1$. On a alors

$$np = (2k+1)(2l+1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1.$$

  Ainsi, le produit np est impair.
- La proposition $\mathcal{P}_2$ est fausse. En effet, $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ sont des rationnels non entiers mais leur somme vaut 1, qui est un entier.
- La proposition $\mathcal{P}_3$ est fausse. On a en effet $-2 < 0$ mais $(-2)^2 \geqslant 0^2$.
- La proposition $\mathcal{P}_4$ est vraie (il s'agit en fait de la croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$). Soit x et y deux réels positifs. Supposons que $x < y$. On a alors $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. Or, $x - y < 0$ puisque $x < y$. De plus, x et y étant positifs (et l'un d'eux l'est strictement), on a alors $x + y > 0$. Finalement, $x^2 - y^2 < 0$ et donc $x^2 < y^2$.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

1. Cette proposition signifie que si la somme de N réels est supérieure ou égale à M, alors il y a au moins un de ces réels qui est supérieur à M/N.
2. La contraposée de $\mathcal{P}$ est :

$$\left(\forall i \in [\![1;N]\!],\, a_i < \frac{M}{N}\right) \Rightarrow (a_1 + \ldots + a_N < M).$$

3. Soit a_1, ..., a_N des réels. Supposons que tous ces réels sont strictement inférieurs à M/N. On a alors

$$a_1 + \ldots + a_n < \frac{M}{N} + \ldots + \frac{M}{N} = M.$$

   Par contraposée, la proposition $\mathcal{P}$ est donc vraie.

► Correction 8 – Voir l'énoncé

Soit x et y deux nombres rationnels. On pose alors les entiers a, b, c et d tels que $x = \dfrac{a}{b}$ et $y = \dfrac{c}{d}$.

Alors, $x + y = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$. Or, $ad + bc$ et bd sont des entiers, $x + y$ est donc rationnel.

Par contraposée, si la somme de deux rationnels est irrationnelle, alors l'un des deux est irrationnel.

► Correction 9 – Voir l'énoncé

Soit a un réel. Supposons que $a \neq 0$. On a alors $|a| > 0$. Posons alors $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$.

On a bien $\varepsilon > 0$ et $|a| \geqslant \varepsilon$. On a donc prouvé l'implication $a \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0 \,|\, |a| > \varepsilon)$.

Par contraposée, on a bien $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

► Correction 10 – Voir l'énoncé

On a rangé $n+1$ chaussettes dans n tiroirs.

Supposons que tous les tiroirs contiennent strictement moins de 2 paires de chaussettes. Puisqu'il y a n tiroirs, cela veut dire qu'on a réparti au maximum n paires de chaussettes. C'est absurde.

Ainsi, il y a au moins un tiroir qui contient au moins 2 paires de chaussettes.

► Correction 11 – Voir l'énoncé

La négation de la proposition $\mathcal{P}$ est « pour tout triplet de nombre parmi a_1, ..., a_9, la somme de ces nombres est strictement inférieur à 30 ».

Supposons donc que c'est le cas. On aurait alors $a_1+a_2+a_3<30$, $a_4+a_5+a_6<30$ et $a_7+a_8+a_9<30$. En sommant ces trois inégalités, on aurait alors $a_1+\ldots+a_9<90$. Ce qui est absurde.

Par l'absurde, la proposition $\mathcal{P}$ est donc vraie.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

On suppose que $x \neq y$.

Puisque $\dfrac{x}{1+y}=\dfrac{y}{1+x}$. Puisque x et y sont positifs, on a $(1+x)\neq 0$ et $(1+y)\neq 0$. On multiplie donc l'égalité précédente par ces deux quantités.

On a donc $x(1+x)=y(1+y)$ soit $x+x^2=y+y^2$ et donc $x^2-y^2=y-x=-(x-y)$.

Ainsi, $(x-y)(x+y)=-(x-y)$. Or, puisque $x\neq y$, on a donc $x-y\neq 0$ et on peut donc simplifier cette égalité par $x-y$. On a a donc $x+y=-1$, ce qui est impossible puisque x et y sont positifs.

On a donc montré par l'absurde que $x=y$.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

Analyse : Soit f une fonction solution du problème.

Prenons $x=y=0$. On a alors $f(0)^2-f(0)=0$ et donc $f(0)(f(0)-1)=0$. Ainsi, on a $f(0)=0$ ou $f(0)=1$.

Prenons alors $x=1$ et $y=0$. On a alors $f(1)f(0)-f(0)=1$. Or, si $f(0)=0$, cela mènerait à $0=1$ ce qui est impossible. On a donc nécessairement $f(0)=1$.

Prenons donc x quelconque et $y=0$. On a alors $f(x)f(0)-f(0x)=x+0$, c'est-à-dire, sachant que $f(0)=1$, que $f(x)-1=x$ et donc $f(x)=x+1$.

Synthèse : Posons donc $f: x\mapsto x+1$ et vérifions que cette fonction est solution de notre problème. Soit x et y deux réels. On a

$$f(x)f(y)-f(xy)=(x+1)(y+1)-(xy+1)=xy+x+y+1-xy-1=x+y.$$

Ainsi, f est bien solution de l'équation

Conclusion : l'unique solution de l'équation fonctionnelle donnée est la fonction $x\mapsto x+1$.

► Correction 14 – Voir l'énoncé

oit f une fonction affine, a et b des réels tels que, pour tout réel x, $f(x)=ax+b$.

On a alors $f(f(x))=f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$.

Analyse : Supposons que f est solution de (E). Alors, pour tout réel x, on a a $a^2x+ab+b=x$. En particulier, pour $x=0$, on a $ab+b=0$. Pour $x=1$, on a alors $a^2=1$ et donc $a=1$ ou $a=-1$.

- Si $a=1$, on a alors $ab+b=0$ si et seulement si $b=0$.
- Si $a=-1$, on a $ab+b=0$ et cette égalité est d'ores et déjà respecté, peu importe la valeur de b.

Ainsi, si $f: x\mapsto ax+b$ est solution de (E), on a alors ($a=1$ et $b=0$) ou $a=-1$

Synthèse : Soit $f: x\mapsto x$, qui correspond au cas $a=1$ et $b=0$. On a bien, pour tout réel x, que $f(f(x))=x$.

Soit $f: x\mapsto -x+b$. Pour tout réel x, on a $f(f(x))=-(-x+b)+b=x-b+b=x$. f est solution de (E).

Conclusion : Les solutions de (E) sont les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto -x+b$ pour tout réel b.

► Correction 15 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 4 + 8 \times 3^n$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a bien $4 + 8 \times 3^0 = 4 + 8 \times 1 = 12 = u_0$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = 4 + 8 \times 3^n$. Or, $u_{n+1} = 3u_n - 8$. Ainsi, $u_{n+1} = 3(4 + 8 \times 3^n) - 8 = 3 \times 4 + 3 \times 8 \times 3^n - 8 = 4 + 8 \times 3^{n+1}$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 16 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leqslant 10$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et donc $u_0 \leqslant 10$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \leqslant 10$. Ainsi, $\frac{1}{5} \times 10 \leqslant \frac{1}{5} \times 10$ et $\frac{1}{5}u_n + 8 \leqslant \frac{1}{5} \times 10 + 8$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant 10$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie. $\mathcal{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

On a

- $u_2 = \dfrac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
- $u_3 = \dfrac{u_2}{\sqrt{u_2^2 + 1}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ».

- **Initialisation** : $\dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1 = u_1$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.Or, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$. Ainsi,

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

  $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n

► Correction 18 – Voir l'énoncé

Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(1-q)S = (1-q)(1 + q + q^2 + \ldots + q^n = 1 - q + q - q^2 + q^3 - q^3 + \ldots - q^n + q^n - q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}$$

Ainsi, $(1-q)S = 1 - q^{n+1}$. Puisque $q \neq 1$, on peut diviser cette égalité par $(1-q)$ et on obtient $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$.

Montrons désormais cette égalité par récurrence.

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$ ».

- **Initialisation** : Pour $n=0$, la première somme vaut 1 et $\dfrac{1-q^{0+1}}{1-q}=\dfrac{1-q}{1-q}=1$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a donc $1+q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
  En ajoutant q^{n+1} aux deux membres de cette égalité, on a alors

$$1+q+q^2+\ldots+q^n+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q}=\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q}=\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et P est héréditaire. Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

Fixons-nous un réel a strictement positif.
Pour tout entier naturel n, on note alors $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $(1+a)^n\geqslant 1+na$ ».

- **Initialisation** : Prenons $n=0$.
  - D'une part, $(1+a)^0=1$.
  - D'autre part, $1+0\times a=1$.

  On a bien $(1+a)^0\geqslant 1+0\times a$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a donc $(1+a)^n\geqslant 1+na$.
  En multipliant des deux côtés de l'inégalité par $(1+a)$, qui est strictement positif, on obtient alors que

$$(1+a)^{n+1}\geqslant(1+na)(1+a).$$

  Or,

$$(1+na)(1+a)=1+na+a+na^2=1+(n+1)a+na^2\geqslant 1+(n+1)a.$$

  Ainsi, $(1+a)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)a$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie et, si pour $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 20 – Voir l'énoncé

On procède par récurrence double.

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $u_n=(1-n)2^n$ ».

- **Initialisation** : On a $(1-0)2^0=1=u_0$ et $(1-1)2^1=0=u_1$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
- **Hérédité** : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. On a alors

$$u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n=4(1-(n+1))2^{n+1}-4(1-n)2^n=-4\times n\times 2^{n+1}-(1-n)\times 4\times 2^n$$

  Remarquons que $4=2^2$. On a donc $4\times 2^{n+1}=2^2\times 2^{n+1}=2\times 2^{n+2}$ et que $4\times 2^n=2^{n+2}$. Ainsi,

$$u_{n+2}=2^{n+2}(-2n-1+n)=2^{n+2}(-1-n)=2^{n+2}(1-2-n)=2^{n+2}(1-(n+2)).$$

  $\mathcal{P}(n+2)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies et $\mathcal{P}$ est héréditaire. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 21 – Voir l'énoncé

On procède par récurrence double.

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $u_n=-1+n(n-1)$ ».

- **Initialisation** : On a $-1+0(0-1)=-1=u_0$ et $-1+1(1-1)=-1=u_1$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.
  Montrons alors que $u_{n+2}=-1+(n+2)(n+1)$, c'est-à-dire $u_{n+2}=n^2+3n+1$. On a alors

  $$u_{n+2}=(n+1)u_{n+1}-(n+2)u_n=(n+1)(-1+(n+1)n)-(n+2)(-1+n(n-1))$$

  Ainsi,

  $$\begin{aligned} u_{n+2} &= -n-1+(n+1)^2n+n+2-(n+2)n(n-1) \\ &= 1+(n^2+2n+1)n-(n^2+2n)(n-1) \\ &= 1+n^3+2n^2+n-n^3+n^2-2n^2+2n \\ &= n^2+3n+1 \\ &= -1+(n+2)(n+1) \end{aligned}$$

  $\mathcal{P}(n+2)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies et $\mathcal{P}$ est héréditaire. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 22 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathcal{P}(n)$: « n^2+n est pair ».

- **Initialisation** : Pour $n=0$, on a $0^2+0=0$ qui est pair. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors

  $$(n+1)^2+(n+1)=n^2+2n+1+n+1=n^2+n+2n+2$$

  Puisque n^2+n est pair, on peut poser $k \in \mathbb{N}$ tel que $n^2+n=2k$. Ainsi,

  $$(n+1)^2+(n+1)=2k+2n+2=2(k+n+1).$$

  $(n+1)^2+(n+1)$ est donc pair. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Montrons maintenant ce résultat par disjonction de cas. Soit n un entier naturel.

- Supposons que n est pair. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $n=2k$. On a alors

  $$n^2+n=(2k)^2+2k=4k^2+2k=2(2k^2+k).$$

  n^2+n est donc pair.
- Supposons que n est impair. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $n=2k+1$. On a alors

  $$n^2+n=(2k+1)^2+2k+1=4k^2+4k+1+2k+1=2(2k^2+3k+1).$$

  n^2+n est donc pair.

On a montré que, dans tous les cas, n^2+n est donc pair.