

1. Nombres complexes : forme algébrique

1 Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 1 : Il existe un ensemble de nombres appelé **nombres complexes** et noté $\mathbb{C}$ tel que

- L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.
- Il existe un nombre complexe, noté i , et tel que $i^2 = -1$.
- L'addition et la multiplication des réels se prolonge "naturellement" dans l'ensemble des complexes.
- Pour tout nombre complexe z , il existe un couple de réels (a, b) tel que $z = a + ib$.

■ **Exemple 1 :** $2 + 3i$, $7i$, $\sqrt{5}$, $\frac{1}{2} - \frac{4}{5}i$ sont des nombres complexes.

L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent naturellement pour les nombres complexes. Le nombre i joue le rôle de facteur. Il ne faut toutefois pas oublier que $i^2 = -1$, notamment pour la multiplication. Ainsi, on peut développer, factoriser, et l'on retrouve évidemment les identités remarquables.

■ **Exemple 2 :** Soit $z = 2 + 5i$ et $z' = 1 - 3i$. Alors $z + z' = 2 + 5i + 1 - 3i = 3 + 2i$ et

$$zz' = (2 + 5i)(1 - 3i) = 2 \times 1 + 5i \times 1 + 2 \times (-3i) + 5i \times (-3i) = 2 + 5i - 6i - 15i^2 = 17 - i.$$

$$\text{Enfin, } z^2 = (2 + 5i)^2 = 4^2 + 2 \times 2 \times 5i + (5i)^2 = 16 + 20i - 25 = -9 + 20i.$$

Propriété 1 : Soit a et b deux réels et $z = a + ib$. On a $z = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$.

Démonstration 1 : D'une part, si $a = b = 0$, alors $z = 0 + i0 = 0$.

Réciproquement, supposons que $z = 0$, c'est-à-dire $a + ib = 0$.

Nous allons raisonner par l'absurde pour montrer que nécessairement, a et b valent tous deux 0. Pour cela, nous allons supposer le contraire et aboutir à une absurdité, ce qui nous permettra de conclure que l'hypothèse faite au départ était fausse.

Supposons donc que soit a , soit b ne soit pas nul.

- Si $b = 0$, puisque $a + ib = 0$, on obtient également que $a = 0$, ce qui est contraire à ce que nous avons supposé. Ainsi, on a forcément $b \neq 0$.
- Si $b \neq 0$, alors, puisque $a + ib = 0$, on a donc $i = -\frac{a}{b}$. i serait donc le quotient de deux nombres réels, et serait donc lui aussi un réel. C'est absurde.

Ainsi, $a = b = 0$. □

Propriété 2 : Soit a, a', b et b' quatre réels. Alors $a + ib = a' + ib'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

Démonstration 2 : On a en effet $a + ib = a' + ib'$ si et seulement si $a - a' + i(b - b') = 0$. D'après le premier point, c'est équivalent à dire que $a - a' = 0$ et $b - b' = 0$.

Finalement, $a + ib = a' + ib'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$. □

1.2 Partie réelle et partie imaginaire d'un nombre complexe

Nous venons donc de démontrer que l'écriture $z = a + ib$ d'un nombre complexe z est unique. On peut donc définir la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe.

Définition 2 : Soit z un nombre complexe. Il existe un **unique** couple de réels (a, b) tel que $z = a + ib$.

- a est appelée **partie réelle** de z , notée $Re(z)$.
- b est appelée **partie imaginaire** de z , notée $Im(z)$.
- L'écriture $z = a + ib$ est la **forme algébrique** de z .

Propriété 3 : Soit z et z' deux nombres complexes. Alors

- $Re(z + z') = Re(z) + Re(z')$ et $Im(z + z') = Im(z) + Im(z')$;
- $Re(zz') = Re(z)Re(z') - Im(z)Im(z')$ et $Im(zz') = Re(z)Im(z') + Im(z)Re(z')$.

Démonstration 3 : Soit z et z' deux nombres complexes. Notons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' des réels.

On a $z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$.

Ainsi, $Re(z + z') = a + a' = Re(z) + Re(z')$ et $Im(z + z') = b + b' = Im(z) + Im(z')$.

Par ailleurs,

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + ia'b + i^2bb' = aa' - bb' + i(ab' + a'b).$$

Ainsi, $Re(zz') = aa' - bb' = Re(z)Re(z') - Im(z)Im(z')$ et $Im(zz') = ab' + a'b = Re(z)Im(z') + Im(z)Re(z')$.

□

Définition 3 : Soit z un nombre complexe.

- z est un nombre réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.
- Si $Re(z) = 0$, on dit que z est un nombre imaginaire pur. On note $z \in i\mathbb{R}$.

■ **Exemple 3 :** $2i$ est un nombre imaginaire pur.

1.3 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

L'unicité de l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique permet de résoudre des équations dans $\mathbb{C}$.

■ **Exemple 4 :** Résoudre l'équation $(E) : 2z + i - 3 = 5i + 4z - 7$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$2z + i - 3 = 5i + 4z - 7 \Leftrightarrow 2z - 4z = 5i - 7 + 3 - i \Leftrightarrow -2z = -4 + 4i \Leftrightarrow z = 2 - 2i$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $S = \{2 - 2i\}$.

Nous pouvons donc résoudre des équations dans $\mathbb{C}$ en utilisant les mêmes méthodes que pour les équations dans $\mathbb{R}$, à la différence que l'on peut avoir des solutions qui ne sont pas réelles. Il est également possible de poser $z = a + ib$ et d'identifier les parties réelles et imaginaires de chaque membre de l'équation.

Toutefois, il est important de garder à l'esprit que l'on ne peut pas comparer deux nombres complexes. Il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$. On ne résout donc pas d'inéquations dans $\mathbb{C}$.

2 Conjugué d'un nombre complexe

2.1 Définition et propriétés

Définition 4 : Soit a et b deux réels et $z = a + ib$.

Le **conjugué** de z est le nombre complexe noté $\bar{z}$ et qui vaut $\bar{z} = a - ib$.

■ **Exemple 5 :** Le conjugué de $7 + 3i$ est $7 - 3i$. Le conjugué de $2i$ est $-2i$.

Propriété 4 : Soit $z \in \mathbb{C}$.

- z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$;
- z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.

Démonstration 4 — Premier point : Soit $z = a + ib$ avec a et b des réels. On a donc $\bar{z} = a - ib$.

- Si $z = \bar{z}$, alors $a + ib = a - ib$ ce qui implique que $2ib = 0$ et donc $b = 0$. z est donc réel.
- Si z est réel, alors $b = 0$. Ainsi, $z = a$ et $\bar{z} = a$. On a bien $z = \bar{z}$.

□

La démonstration du deuxième point fait l'objet d'un exercice.

Propriété 5 : Soit z et z' deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes

$$\overline{\bar{z}} = z \qquad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \qquad \overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

Démonstration 5 : Soit z et z' deux complexes. Soit a, b, a' et b' quatre réels tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

On a $\bar{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a - (-ib) = a + ib = z$.

Par ailleurs, $\overline{z + z'} = \overline{a + ib + a' + ib'} = \overline{a + a' + i(b + b')} = a + a' - i(b + b') = a - ib + a' - ib' = \bar{z} + \bar{z}'$.

Pour montrer la propriété sur le produit, on raisonne en deux temps.

- D'une part,

$$\bar{z} \times \bar{z}' = (a - ib)(a' - ib') = aa' - iab' - ia'b + i^2bb' = aa' - bb' - i(ab' + a'b).$$

- D'autre part,

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + ia'b + i^2bb' = aa' - bb' + i(ab' + a'b).$$

On a bien $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$.

□

Propriété 6 : Soit z un nombre complexe et n un entier naturel non nul. Alors $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Démonstration 6 : Soit z un nombre complexe. Nous allons démontrer cette propriété par récurrence.

Pour tout entier naturel non nul n , on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a $\overline{z^1} = \bar{z} = \bar{z}^1$. $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a donc $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.
Or, $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z}$. La propriété précédente nous assure donc que $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n} \times \bar{z}$.
Or, par hypothèse de récurrence, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.
Ainsi, $\overline{z^{n+1}} = \bar{z}^n \times \bar{z} = \bar{z}^{n+1}$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n .

□

Propriété 7 : Soit z un complexe. Soit a et b deux réels tels que $z = a + ib$. Alors

$$z\bar{z} = a^2 + b^2.$$

Démonstration 7 : On a en effet

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2.$$

□

2.2 Résolution d'équation en z et $\bar{z}$

Lorsque des équations font intervenir z et $\bar{z}$, il est préférable d'écrire ces nombres sous forme algébrique, puis d'identifier les parties réelles et imaginaires de chaque membre de l'équation.

■ **Exemple 6 :** On souhaite résoudre l'équation (E) : $2z + 3i - 5 = 3i\bar{z} - 2i + 5$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On pose alors $z = a + ib$. On a donc $\bar{z} = a - ib$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 2z + 3i - 5 = 3i\bar{z} - 2i + 5 &\Leftrightarrow 2(a + ib) + 3i - 5 = 3i(a - ib) - 2i + 5 \\ &\Leftrightarrow 2a + 2ib + 3i - 5 = 3ia + 3b - 2i + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2a - 3b - 5 - 5 + i(2b + 3 - 3a + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2a - 3b - 10 + i(2b - 3a + 5) = 0 \end{aligned}$$

Or, un complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaires sont nulles. On obtient donc le système suivant.

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b - 10 = 0 \\ -3a + 2b + 5 = 0 \end{cases}$$

On peut alors résoudre ce système avec la méthode de son choix. Par exemple, en procédant par combinaison. On multiplie la première ligne par 3 et la deuxième par 2.

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 9b - 30 = 0 \\ -6a + 4b + 10 = 0 \end{cases}$$

On remplace L_2 par $L_2 + L_1$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 9b - 30 = 0 \\ -5b - 20 = 0 \end{cases}$$

On obtient donc

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 9 \times (-4) - 30 = 0 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 6 = 0 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \end{cases}$$

On a donc $S = \{-1 - 4i\}$.

3 Division dans $\mathbb{C}$

Jusqu'à présent, nous avons vu que l'addition, la soustraction et la multiplication s'étendent naturellement à l'ensemble $\mathbb{C}$. En appliquant les règles de calcul usuelles, le résultat de ces opérations s'exprime facilement sous forme algébrique.

L'extension de la division soulève en revanche une difficulté : que signifie diviser par un nombre complexe comme $2 + 3i$? Cette division aboutit-elle à un complexe ? Si oui, comment l'exprimer sous forme algébrique ?

Pour contourner ce problème, il faut se ramener à une notion fondamentale. Dans l'ensemble des nombres réels, diviser par un nombre non nul revient simplement à multiplier par son inverse. Nous allons adopter exactement la même démarche dans $\mathbb{C}$: avant de pouvoir définir le quotient de deux nombres complexes, il nous faut d'abord prouver que tout nombre complexe non nul possède un inverse par rapport à la multiplication.

3.1 Inverse d'un complexe

Propriété 8 : Soit z un nombre complexe non nul. Il existe un unique complexe z' tel que $zz' = z'z = 1$.

Démonstration 8 : Soit z un complexe non nul. Soit a et b les deux réels tels que $z = a + ib$ un nombre complexe non nul.

Puisque $z \neq 0$, les réels a et b ne sont pas simultanément nuls, ce qui garantit que $a^2 + b^2 \neq 0$.

Soit z' un complexe. Soit x et y les deux réels tels que $z' = x + iy$. Alors

$$(E) : zz' = 1 \Leftrightarrow (a + ib)(x + iy) = 1 \Leftrightarrow (ax - by) + i(bx + ay) = 1 + 0i.$$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont égales. On obtient donc le système linéaire suivant, d'inconnues x et y :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 1 & (L_1) \\ bx + ay = 0 & (L_2) \end{cases}$$

Distinguons alors trois cas :

- Si $b = 0$, on a alors $a \neq 0$. Ainsi $(E) \Leftrightarrow x = 1/a$ et $y = 0$.
L'unique inverse de $z = a$ est donc $\frac{1}{a}$ (on retrouve ici le cas réel)
- Si $a = 0$, on a alors $b \neq 0$. Ainsi, $(E) \Leftrightarrow x = 0$ et $y = -1/b$.
L'unique inverse de $z = ib$ est donc $-\frac{1}{b}i$.

On suppose désormais que $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Puisque $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on peut multiplier L_1 par a et L_2 par b en conservant l'équivalence stricte du système :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2x - aby = a & (L'_1) \\ b^2x + aby = 0 & (L'_2) \end{cases}$$

On remplace la première ligne par la somme des deux lignes ($L'_1 \leftarrow L'_1 + L'_2$), ce qui conserve l'équivalence :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 + b^2)x = a \\ b^2x + aby = 0 \end{cases}$$

Puisque $a^2 + b^2 \neq 0$, on peut isoler x dans la première ligne, puis substituer cette expression dans la seconde :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ b^2 \times \left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) + aby = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ aby = -\frac{ab^2}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Puisque $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on peut diviser la deuxième ligne par ab :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ y = -\frac{b}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Le système admet donc un unique couple solution. Il existe ainsi un unique nombre complexe z' tel que $zz' = 1$, qui est :

$$z' = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

□

Définition 5 : Soit z un complexe non nul.

L'unique complexe z' tel que $zz' = 1$ est appelé inverse de z et est noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1} .

■ **Exemple 7 :** Déterminons l'inverse du nombre complexe $z = 1 + 2i$. En appliquant la formule démontrée précédemment, on obtient :

$$\frac{1}{1 + 2i} = \frac{1}{1^2 + 2^2} - i \frac{2}{1^2 + 2^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

On peut par ailleurs vérifier que $(1 + 2i) \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \right) = 1$.

Dans la pratique, on n'utilise presque jamais la formule de l'inverse telle quelle pour calculer un quotient.

En observant l'expression de l'inverse trouvée dans la démonstration $\left(z' = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \right)$, on remarque que le numérateur correspond exactement au conjugué $\bar{z} = a - ib$, et le dénominateur correspond au produit $z\bar{z} = a^2 + b^2$ (qui est un nombre réel positif).

On a en réalité $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$ (ce quotient est bien défini puisque le dénominateur est un réel strictement positif).

3.2 Quotient de deux complexes

Définition 6 : Soit z un complexe et z' un complexe non nul.

On définit le **quotient** de z par z' par $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.

Dans la pratique, pour exprimer un quotient sous forme algébrique, on utilise la remarque précédente.

Puisque $\frac{1}{z'} = \frac{\bar{z'}}{z'\bar{z'}}$, l'opération de division revient à écrire $\frac{z}{z'} = z \times \frac{\bar{z'}}{z'\bar{z'}} = \frac{z\bar{z'}}{z'\bar{z'}}$.

Pour écrire un quotient sous forme algébrique, **on multiplie donc le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.**

■ **Exemple 8 :** On souhaite exprimer $\frac{4+3i}{3-i}$ sous forme algébrique. Le dénominateur est $3-i$, dont le conjugué est $3+i$. On multiplie donc numérateur et dénominateur par $3+i$.

$$\frac{4+3i}{3-i} = \frac{(4+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{12+4i+9i+3i^2}{3^2-i^2} = \frac{12+13i-3}{9-(-1)} = \frac{9}{10} + \frac{13}{10}i.$$

■ **Exemple 9 :** On souhaite résoudre l'équation $2z + 3 - i = (1+i)z - 2 + i$. Soit donc $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 2z + 3 - i &= (1+i)z - 2 + i &\Leftrightarrow 2z - (1+i)z &= -2 + i - 3 + i \\ &&\Leftrightarrow (1-i)z &= -5 + 2i \\ &&\Leftrightarrow z &= \frac{-5+2i}{1-i} \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \frac{-5+2i}{1-i} = \frac{(-5+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-5-5i+2i-2}{1^2-i^2} = \frac{-7-3i}{2} = -\frac{7}{2} - \frac{3}{2}i.$$

L'unique solution de l'équation $2z + 3 - i = (1+i)z - 2 + i$ est donc $-\frac{7}{2} - \frac{3}{2}i$.

Propriété 9 : Soit z un complexe et z' un complexe non nul. Alors

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}} \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}.$$

Démonstration 9 : Soit z un complexe non nul.

D'après la propriété sur le produit des conjugués, on a $\bar{z} \times \frac{1}{z} = \overline{z \times \frac{1}{z}} = \overline{1} = 1$ et donc $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.

Par ailleurs, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \frac{1}{z'}} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}$ d'après la proposition sur le conjugué du produit.

Mais alors, d'après la propriété précédemment démontrée, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{\bar{z'}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}.$ □

4 Équations du second degré à coefficients réels

Propriété 10 : Soit a un réel strictement positif.

Les solutions de l'équation $z^2 = -a$ d'inconnue complexe z sont les complexes $i\sqrt{a}$ et $-i\sqrt{a}$.

Démonstration 10 : Soit $z \in \mathbb{C}$. On a en effet $z^2 + a = z^2 - i^2 \times a = z^2 - (i\sqrt{a})^2 = (z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a})$.

Ainsi, $z^2 + a = 0$ si et seulement si $z - i\sqrt{a} = 0$ ou $z + i\sqrt{a} = 0$, d'où le résultat. □

■ **Exemple 10 :** Les solutions de l'équation $z^2 = -4$ sont $2i$ et $-2i$.

L'exemple que nous venons de voir est un peu simpliste mais permet de vous rafraîchir la mémoire. Passons donc aux choses sérieuses.

Théorème 11 : Soit a, b et c des réels avec $a \neq 0$. Soit $P : z \mapsto az^2 + bz + c$.

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme P .

- Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines réelles distinctes : $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta = 0$, alors P admet une racine réelle double : $-\frac{b}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, alors P admet deux racines complexes conjuguées : $\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Démonstration 12 : Écrivons P sous forme canonique. Pour tout complexe z ,

$$az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right).$$

- Si $\Delta > 0$, alors, pour tout complexe z ,

$$az^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right) = a \left(z + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right).$$

Ainsi, P possède deux racines réelles qui sont $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta = 0$, alors pour tout complexe z , $az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2$. L'unique racine de P est $-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$. Ainsi, pour tout complexe z ,

$$az^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a^2} \right) \right) = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - i^2 \times \left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}} \right)^2 \right).$$

On se retrouve dans le même cas que dans la propriété précédente, et on procède donc de la même manière. Pour tout complexe z ,

$$az^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 \right) = a \left(z + \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right).$$

Ainsi, P admet deux racines complexes conjuguées : $\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

□

■ **Exemple 11 :** On cherche à résoudre l'équation $2z^2 + 3z + 5 = 0$.

Le discriminant du polynôme $2z^2 + 3z + 5$ vaut $3^2 - 4 \times 2 \times 5 = -31 < 0$.

L'équation $2z^2 + 3z + 5 = 0$ possède donc deux solutions : $z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{31}}{4}$ et $z_2 = \frac{-3 - i\sqrt{31}}{4}$.

Remarque : La démonstration met en évidence la factorisation (dans $\mathbb{C}$) de tout polynôme de degré 2 à coefficients réels, peu importe la nature de leurs racines (réelles ou imaginaires).

Si z_1 et z_2 sont les deux racines du polynôme $az^2 + bz + c$, alors pour tout **complexe** z , on a

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$