

Exercices : Nombres complexes

Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

► Exercice 1 – Voir le corrigé

Exprimer les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

$$1 + 2i - 4i + 7 - 3i^2$$

$$(1 + 2i)(5 - 4i)$$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}i\right)\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{4}i\right)$$

$$(5 + 3i)(10 - 6i)$$

$$(2i)^{10}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8$$

► Exercice 2 – Voir le corrigé

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$$z + 2i - 4 = 5i + 3$$

$$\frac{z - 4i}{3} = \frac{1}{2} + 5i$$

$$(3 + 2i)z + i - 5 = 1 + 5i$$

$$(z - 3 + i)(2z - 5i) = 0$$

$$\frac{z + 1 + i}{1 - z} = 0$$

$$\frac{z - 3i + 1}{z - 3} = \frac{1}{4}$$

► Exercice 3 – Voir le corrigé

Résoudre les système suivants, d'inconnues complexes z_1 et z_2 .

$$\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 5 - 3i \\ z_1 - 3z_2 = 4 + 6i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3z_1 + 4z_2 = 1 + 2i \\ z_1 - 2z_2 = 2 + i \end{cases}$$

► Exercice 4 – Voir le corrigé

Soit x un réel et $z = 2x + 1 + i(x^2 + 5x - 4)$

1. Déterminer la valeurs de x pour laquelle z est un imaginaire pur. Que vaut alors z ?
2. Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles z est réel ? Que vaut alors z ?

► Exercice 5 – Voir le corrigé

Soit z et z' deux complexes tels que $Re(zz') = Re(z) \times Re(z')$. Montrer que z ou z' est réel.

► Exercice 6 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout z dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1. Soit $z = a + ib$ un complexe. Exprimer les parties réelles et imaginaires de $f(z)$ en fonction de a et b .
2. Quels sont les nombres complexes dont l'image par f est un réel ?

► Exercice 7 – Voir le corrigé

Pour tout complexe z , on note $P(z) = 6z^3 + (1 - 30i)z^2 - (12 + 5i)z + 60i$.

1. Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une unique solution imaginaire pure que l'on déterminera.
2. Montrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que, pour tout complexe z , $P(z) = (z - 5i)(az^2 + bz + c)$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

► Exercice 8 – Voir le corrigé

Résoudre l'équation $z^2 = -3 + 4i$ sur $\mathbb{C}$. On pourra par exemple poser $z = a + ib$.

Conjugué d'un nombre complexe

► Exercice 9 – Voir le corrigé

Démontrer la propriété du cours suivante : Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $\bar{z} = -z$.

► Exercice 10 – Voir le corrigé

Soit z un nombre complexe.

1. Montrer que $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
2. Trouver et démontrer une relation similaire pour exprimer $\operatorname{Im}(z)$ en fonction de z et $\bar{z}$.

► Exercice 11 – Voir le corrigé

On considère le complexe $z = (1 - 3i)(5 + 4i)(1 + 3i)(10 - 8i)$. Sans calcul, montrer que $z \in \mathbb{R}$.

► Exercice 12 – Voir le corrigé

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{lll} 2z + 3 = 3\bar{z} + 4 - i & 2z - 4\bar{z} = 6 - 3i & z + \bar{z} = 3 + 4i \\ 2z + 4 + i = (3 + i)\bar{z} + 2 - 3i & \bar{z} - 1 = z\bar{z} - i & \bar{z} = iz \end{array}$$

► Exercice 13 – Voir le corrigé

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \bar{z} + 1 = 0$.

Division dans $\mathbb{C}$

► Exercice 14 – Voir le corrigé

Ecrire les nombres suivants sous forme algébrique.

$$\frac{1}{i} \quad \frac{1}{1+i} \quad \frac{2}{4-5i} \quad \frac{2i}{i-3} \quad \frac{1-6i}{2+4i} \quad \frac{3-2i}{2i-3}$$

► Exercice 15 – Voir le corrigé

Résoudre les équations suivantes, d'inconnues complexes z . On exprimera le résultat sous forme algébrique.

$$(1 + 2i)z + 3 = 5 - 4i \quad (3 - 4i)z + 1 - 3i = 2iz \quad \frac{z-i}{iz-1} = \frac{1}{3}$$

► Exercice 16 – Voir le corrigé

Pour tout complexe z différent de 1, on pose $f(z) = \frac{2-iz}{1-z}$

1. Montrer que $f(z)$ ne peut pas être égal à i .
2. Soit Z un complexe différent de i . Déterminer, s'il(s) existe(nt), le(s) antécédent(s) de Z par f .

► Exercice 17 – Voir le corrigé

Soit z un complexe non nul. Montrer de deux manières différentes que $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$ est un réel.

► Exercice 18 – Voir le corrigé

Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que $j^2 = \frac{1}{j} = \bar{j}$.

► **Exercice 19 – Voir le corrigé**

On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = \frac{z_n - 6}{1 + i}$

1. Exprimer z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = z_n - 6i$
 - (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
 - (b) En déduire une expression de u_n puis de z_n en fonction de n .
3. On considère la suite (t_n) définie par $t_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $t_{n+1} = \frac{t_n - 6}{1 - i}$.
 - (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $t_n = \overline{z_n}$
 - (b) Sans avoir recours à un nouveau calcul, exprimer t_n en fonction de n pour tout entier naturel n .

► **Exercice 20 – Voir le corrigé**

On considère la fonction $f : z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$, définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

1. Exprimer $f(1 + 2i)$ sous forme algébrique.
2. Montrer que pour tout complexe $z \neq -i$, $f(z) \neq 1$.
3. Soit Z un complexe différent de 1. Déterminer l'unique antécédent de Z par f .
4. Soit x un réel. Montrer que $f(x) \times \overline{f(x)} = 1$.
5. Réciproquement, soit z un complexe différent de $-i$ tel que $f(z) \times \overline{f(z)} = 1$. Montrer que z est réel.

Équations du second degré

► **Exercice 21 – Voir le corrigé**

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue complexe z .

$$z^2 - 2z + 5 = 0$$

$$z^2 = -9$$

$$2z^2 = 3 - \pi$$

$$4z^2 + 3z + 2 = 0$$

$$z^3 + 2z^2 + 3z = 0$$

$$(z^2 + 3)(z^2 + z + 1) = 0.$$

► **Exercice 22 – Voir le corrigé**

Trouver deux nombres complexes dont la somme vaut 5 et le produit vaut 12.

► **Exercice 23 – Voir le corrigé**

En utilisant un changement de variable, résoudre l'équation $z^4 + 2z^2 - 8 = 0$

► **Exercice 24 – Voir le corrigé**

Pour tout complexe z , on pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 7z - 5$.

1. Déterminer une solution « évidente » de l'équation $P(z) = 0$. On note α cette solution.
2. Déterminer des réels a , b et c tels que pour tout complexe z , $P(z) = (z - \alpha)(az^2 + bz + c)$.
3. Résoudre l'équation $P(z) = 0$ sur $\mathbb{C}$.

► **Exercice 25 – Voir le corrigé**

Soit $x \in]0; \pi[$. Résoudre l'équation $z^2 + 2z \cos(x) + 1 = 0$, d'inconnue complexe z .

Correction des exercices

► Correction de l'exercice 1 – Voir l'énoncé

On a

- $1 + 2i - 4i + 7 - 3i^2 = 8 - 2i + 3 = 11 - 2i$.
- $(1 + 2i)(5 - 4i) = 1 \times 5 + 1 \times (-4i) + 2i \times 5 + 2i \times (-4i) = 5 - 4i + 10i + 8 = 13 + 6i$.
- $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}i\right)\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{4}i\right) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}i + \frac{2}{5}i \times \frac{5}{2} + \frac{2}{5}i \times \frac{1}{4}i = \frac{5}{6} + \frac{1}{12}i + i - \frac{1}{10} = \frac{11}{15} + \frac{13}{12}i$.
- $(5 + 3i)(10 - 6i) = 5 \times 10 + 5 \times (-6i) + 3i \times 10 + 3i \times (-6i) = 50 - 30i + 30i + 18 = 68$.
- $(2i)^{10} = 2^{10} \times i^{10} = 1024 \times (i^2)^5 = 1024 \times (-1)^5 = -1024$.
- Calculons d'abord $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ en utilisant une identité remarquable.

$$\text{On a } \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}i + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 = \frac{2}{4} + i - \frac{2}{4} = i.$$

$$\text{Ainsi, } \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8 = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^4 = i^4 = i \times i \times i \times i = (-1) \times (-1) = 1$$

► Correction de l'exercice 2 – Voir l'énoncé

- $z + 2i - 4 = 5i + 3 \Leftrightarrow z = 3 + 4 + 5i - 2i \Leftrightarrow z = 7 + 3i$.
- $\frac{z - 4i}{3} = \frac{1}{2} + 5i \Leftrightarrow z = 3 \times \left(\frac{1}{2} + 5i\right) + 4i \Leftrightarrow z = \frac{3}{2} + 19i$.
- $(3 + 2i)z + i - 5 = 1 + 5i \Leftrightarrow (3 + 2i)z = 1 + 5 + 5i - i \Leftrightarrow (3 + 2i)z = 6 + 4i \Leftrightarrow (3 + 2i)z = 2 \times (3 + 2i) \Leftrightarrow z = 2$.
- $(z - 3 + i)(2z - 5i) = 0 \Leftrightarrow z - 3 + i = 0$ ou $2z - 5i = 0 \Leftrightarrow z = 3 - i$ ou $z = \frac{5}{2}i$.
- Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\frac{z + 1 + i}{1 - z} = 0 \Leftrightarrow z + 1 + i = 0 \Leftrightarrow z = -1 - i$.
- Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{3\}$, $\frac{z - 3i + 1}{z - 3} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(z - 3i + 1) = z - 3 \Leftrightarrow 4z - 12i + 4 = z - 3 \Leftrightarrow 3z = -7 + 12i \Leftrightarrow z = -\frac{7}{3} + 4i$.

► Correction de l'exercice 3 – Voir l'énoncé

Premier système

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2z_1 + 3z_2 &= 5 - 3i \\ z_1 - 3z_2 &= 4 + 6i \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2z_1 + 3z_2 &= 5 - 3i \\ 3z_1 &= 9 + 3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z_1 + 3z_2 &= 5 - 3i \\ z_1 &= 3 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(3 + i) + 3z_2 &= 5 - 3i \\ z_1 &= 3 + i \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 6 + 2i + 3z_2 &= 5 - 3i \\ z_1 &= 3 + i \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3z_2 &= -1 - 5i \\ z_1 &= 3 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 &= 3 + i \\ z_2 &= -\frac{1}{3} - \frac{5}{3}i \end{cases} \end{aligned}$$

Second système

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 3z_1 + 4z_2 &= 1 + 2i \\ z_1 - 2z_2 &= 2 + i \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3z_1 + 4z_2 &= 1 + 2i \\ 3z_1 - 6z_2 &= 6 + 3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3z_1 + 4z_2 &= 1 + 2i \\ 10z_2 &= -5 - i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3z_1 + 4z_2 &= 1 + 2i \\ z_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{i}{10} \end{cases} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} 3z_1 + 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{10}\right) &= 1 + 2i \\ z_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{i}{10} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3z_1 - 2 - \frac{2i}{5} &= 1 + 2i \\ z_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{i}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3z_1 &= 3 + \frac{12i}{5} \\ z_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{i}{10} \end{cases} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 &= 1 + \frac{4i}{5} \\ z_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{i}{10} \end{cases}
\end{aligned}$$

► Correction de l'exercice 4 – Voir l'énoncé

z est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle, c'est-à-dire $2x + 1 = 0$ et donc $x = -\frac{1}{2}$. Dans ce cas,

$$z = \left(\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + 5 \times \left(-\frac{1}{2} \right) - 4 \right) i = \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{2} - 4 \right) i = -\frac{25i}{4}.$$

z est réel si sa partie imaginaire est nulle, c'est-à-dire $x^2 + 5x - 4 = 0$. Les solutions sont $-\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}$ et $-\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}$. Dans le premier cas, on a alors $z = -4 - \sqrt{41}$. Dans le second cas, on a $z = -4 + \sqrt{41}$.

► Correction de l'exercice 5 – Voir l'énoncé

Notons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. On a alors $Re(z) \times Re(z') = aa'$.

Par ailleurs, $zz' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$ et donc $Re(zz') = aa' - bb'$. Ainsi, $Re(zz') = Re(z) \times Re(z')$ si et seulement si $aa' - bb' = aa'$ soit $bb' = 0$ et donc $b = 0$ ou $b' = 0$. Autrement dit, z ou z' est réel.

► Correction de l'exercice 6 – Voir l'énoncé

$$f(a + ib) = (a + ib)^2 + 2(a + ib) + 9 = a^2 + 2aib + (ib)^2 + 2a + 2ib + 9 = a^2 - b^2 + 9 + 2a + i \times 2b(a + 1).$$

$f(a + ib)$ est réel si sa partie imaginaire, c'est-à-dire $2b(a + 1)$ vaut 0. Ainsi, $f(z)$ est réel si et seulement si z est réel ou $Re(z) = -1$.

► Correction de l'exercice 7 – Voir l'énoncé

Soit b un réel. On a alors

$$\begin{aligned}
P(ib) &= 6(ib)^3 + (1 - 30i)(ib)^2 - (12 + 5i)ib + 60i = -6ib^3 - b^2 + 30ib^2 - 12ib + 5b + 60i \\
&= -b^2 + 5b + i(-6b^3 + 30b^2 + 12b + 60).
\end{aligned}$$

Ainsi, $P(ib) = 0$ si et seulement si $-b^2 + 5b = 0$ et $-6b^3 + 30b^2 + 12b + 60 = 0$.

La première équation donne $b = 0$ ou $b = 5$. Testons donc ces deux valeurs.

On a $P(0i) = P(0) = 60i \neq 0$. Par ailleurs,

$$P(5i) = 6 \times (5i)^3 + (1 - 30i) \times (5i)^2 - (12 + 5i) \times 5i + 60i = -750i - 25 + 750i - 60i + 25 + 60i = 0$$

Ainsi, l'équation $P(z) = 0$ admet bien une unique solution imaginaire pure. Cette solution est $5i$.

Pour tout complexe z , on a $(z - 5i)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b - 5ai)z^2 + (c - 5bi)z - 5ci$.

Ainsi, en identifiant les coefficients, on a $P(z) = (z - 5i)(az^2 + bz + c)$ si et seulement si $a = 6$, $b - 5ai = 1 - 30i$, $c - 5bi = -12 - 5i$ et $-5ci = 60i$.

On obtient donc $a = 6$, $b = 1$ et $c = -12$. Pour tout complexe z , on a $P(z) = (z - 5i)(6z^2 + z - 12)$.

Or, $6z^2 + z - 12$ est un polynôme du second degré à coefficients réels.

Son discriminant vaut $1^2 - 4 \times 6 \times (-12) = 289 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles qui sont $\frac{-1 - \sqrt{289}}{2 \times 6} = -\frac{3}{2}$ et $\frac{-1 + \sqrt{289}}{2 \times 6} = \frac{4}{3}$.

Les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont donc $5i$, $-\frac{3}{2}$ et $\frac{4}{3}$.

► Correction de l'exercice 8 – Voir l'énoncé

Posons $z = a + ib$, avec a et b réels. On a alors $z^2 = a^2 - b^2 + 2iab = -3 + 4i$.

Ainsi, en identifiant parties réelles et imaginaires, on a $a^2 - b^2 = -3$ et $2ab = 4$.

En particulier, a et b sont non nuls et on a donc $b = \frac{2}{a}$.

En remplaçant b dans la première équation, on obtient $a^2 - \frac{4}{a^2} = -3$ et donc $\frac{a^4 + 3a^2 - 4}{a^2} = 0$.

Posons $x = a^2$, on a alors $x^2 + 3x - 4 = 0$, un polynôme du second degré dont les racines sont 1 et -4 .

On a donc $a^2 = 1$ ou $a^2 = -4$. Puisque a est réel, cette dernière égalité est impossible.

Finalement, on a forcément $a^2 = 1$ et donc $a = 1$ ou $a = -1$.

Si $a = 1$, alors $b = \frac{2}{a} = 2$. Si $a = -1$, alors $b = \frac{2}{a} = -2$. On a donc $z = 1 + 2i$ ou $z = -1 - 2i$.

Vérifions :

- $(1 + 2i)^2 = 1^2 + 4i + (2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$.
- $(-1 - 2i)^2 = (-(1 + 2i))^2 = -3 + 4i$.

Les solutions de l'équation $z^2 = -3 + 4i$ sont donc $1 + 2i$ et $-1 - 2i$.

► Correction de l'exercice 9 – Voir l'énoncé

Soit $z = a + ib$ un complexe.

Si z est un imaginaire pur, alors $a = 0$. Ainsi, $z = ib$ et $\bar{z} = -ib = -z$.

Si $z = -\bar{z}$, alors $a + ib = -(a - ib) = -a + ib$. Il en résulte que $2a = 0$ et donc $a = 0$. z est donc imaginaire pur.

► Correction de l'exercice 10 – Voir l'énoncé

Soit $z = a + ib$ un complexe.

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + ib + a - ib}{2} = \frac{2a}{2} = a = \operatorname{Re}(z).$$

De même,

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{a + ib - (a - ib)}{2} = \frac{2ib}{2i} = b = \operatorname{Im}(z).$$

► Correction de l'exercice 11 – Voir l'énoncé

D'une part, remarquons que $10 - 8i = 2(5 - 4i)$. Ainsi, $z = 2(1 - 3i)(5 + 4i)(1 + 3i)(5 - 4i)$

D'après les formules sur le produit de conjugués, on a

$$\bar{z} = \overline{2(1 - 3i)(5 + 4i)(1 + 3i)(5 - 4i)} = \bar{2} \times \overline{(1 - 3i)} \times \overline{(5 + 4i)} \times \overline{(1 + 3i)} \times \overline{(5 - 4i)}.$$

Ainsi,

$$\bar{z} = 2(1 + 3i)(5 - 4i)(1 - 3i)(5 + 4i) = z$$

Puisque $\bar{z} = z$, on en conclut que z est réel.

► Correction de l'exercice 12 – Voir l'énoncé

- Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

On a $2z + 3 = 3\bar{z} + 4 - i \Leftrightarrow 2(a + ib) + 3 = 3(a - ib) + 4 - i \Leftrightarrow 2a - 3a + 3 - 4 + i(2b + 3b + 1) = 0 \Leftrightarrow -a - 1 + i(5b + 1) = 0$.

On a donc le système $\begin{cases} -a - 1 = 0 \\ 5b + 1 = 0 \end{cases}$ ce qui conduit à $a = -1$ et $b = -\frac{1}{5}$

La solution de cette équation est donc $-1 - \frac{i}{5}$.

- Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

On a $2z - 4\bar{z} = 6 - 3i \Leftrightarrow 2(a + ib) - 4(a - ib) = 6 - 3i \Leftrightarrow 2a - 4a - 6 + i(2b + 4b + 3) = 0 \Leftrightarrow -2a - 6 + i(6b + 3) = 0$.

On a donc le système $\begin{cases} -2a - 6 = 0 \\ 6b + 3 = 0 \end{cases}$ ce qui conduit à $a = -3$ et $b = -\frac{1}{2}$.

La solution de cette équation est donc $-3 - \frac{i}{2}$.

- Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

On a $z + \bar{z} = 3 + 4i \Leftrightarrow a + ib + a - ib = 3 + 4i \Leftrightarrow 2a - 3 - 4i = 0$.

Or, la partie imaginaire du membre de gauche est non nulle. Cette équation n'admet aucune solution (on aurait également tout simplement pu utiliser un exercice précédent : $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$).

- Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

On a $2z + 4 + i = (3 + i)\bar{z} + 2 - 3i \Leftrightarrow 2(a + ib) + 4 + i = (3 + i)(a - ib) + 2 - 3i \Leftrightarrow 2a + 2ib + i + 4 = 3a - 3ib + ia + b + 2 - 3i$.

$\Leftrightarrow 2a - 3a - b - 2 + 4 + i(2b + 1 + 3b - a + 3) \Leftrightarrow -a - b + 2 + i(-a + 5b + 4) = 0$.

Ceci nous amène à résoudre le système

$$\begin{cases} -a - b + 2 = 0 \\ -a + 5b + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - b + 2 = 0 \\ -6b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - b + 2 = 0 \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a - \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = 0 \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

La solution de cette équation est $\frac{7}{3} - \frac{i}{3}$.

- Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

On a $\bar{z} - 1 = z\bar{z} - i \Leftrightarrow a - ib - 1 = (a + ib)(a - ib) - i \Leftrightarrow a - ib - 1 = a^2 + b^2 - i \Leftrightarrow a - a^2 - b^2 + i(1 - b) = 0$.

On a donc le système $\begin{cases} a - a^2 - b^2 - 1 = 0 \\ 1 - b = 0 \end{cases}$.

La seconde ligne nous donne $b = 1$. En remplaçant b par 1 dans la première équation, on a alors $a - a^2 - 2 = 0$. C'est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $1^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = -7$.

Ainsi, l'équation $a - a^2 - 2 = 0$ n'admet pas de solution réelle. L'équation de départ n'a donc pas de solution.

- Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$

On a $\bar{z} = iz \Leftrightarrow a - ib = i(a + ib) \Leftrightarrow a + b - i(a + b) = 0$.

Cette équation est équivalente à $a = -b$. Les solutions sont donc les nombres complexes $a - ia$ pour tout réel a .

► Correction de l'exercice 13 – Voir l'énoncé

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a

$$z^2 - \bar{z} + 1 = 0 \Leftrightarrow (a + ib)^2 - (a - ib) + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2aib - b^2 - a + ib + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 - a + 1 + ib(2a + 1) = 0.$$

On a donc le système
$$\begin{cases} a^2 - b^2 - a + 1 = 0 \\ b(2a + 1) = 0 \end{cases}.$$

La deuxième ligne nous amène à différencier deux cas :

- Soit $b = 0$. La première équation devient alors $a^2 - a + 1 = 0$. C'est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut -3 . Il ne possède donc pas de racine réelle.
- Soit $a = -\frac{1}{2}$. La première équation devient alors $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 1 = b^2$ soit $b^2 = \frac{7}{4}$ ce qui conduit à $b = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ou $b = -\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Les solutions sont donc $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}$.

► Correction de l'exercice 14 – Voir l'énoncé

On a ...

- $\frac{1}{i} = \frac{-i}{i \times -i} = \frac{-i}{1} = -i$.
- $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2 - i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$.
- $\frac{2}{4-5i} = \frac{2(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)} = \frac{8+10i}{4^2 - (5i)^2} = \frac{8}{41} + \frac{10i}{41}$.
- $\frac{2i}{i-3} = \frac{(2i)(-i-3)}{(i-3)(-i-3)} = \frac{2-6i}{3^2 - i^2} = \frac{2}{10} - \frac{6i}{10} = \frac{1}{5} - \frac{3i}{5}$.
- $\frac{1-6i}{2+4i} = \frac{(1-6i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)} = \frac{2-4i-12i-24}{2^2 - (4i)^2} = -\frac{22}{20} - \frac{16i}{20} = -\frac{11}{10} - \frac{4i}{5}$.
- $\frac{3-2i}{2i-3} = \frac{-(2i-3)}{2i-3} = -1$. Attention à ne pas se lancer précipitamment dans les calculs !

► Correction de l'exercice 15 – Voir l'énoncé

- Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $(1+2i)z + 3 = 5 - 4i \Leftrightarrow (1+2i)z = 2 - 4i \Leftrightarrow z = \frac{2-4i}{1+2i}$
On met alors $\frac{2-4i}{1+2i}$ sous forme algébrique : $\frac{2-4i}{1+2i} = \frac{(2-4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2-4i-4i-8}{1^2 - (2i)^2} = -\frac{6}{5} - \frac{8i}{5}$
La solution de cette équation est donc $-\frac{6}{5} - \frac{8i}{5}$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$.

On a $(3 - 4i)z + 1 - 3i = 2iz \Leftrightarrow (3 - 4i)z - 2iz = -1 + 3i \Leftrightarrow (3 - 6i)z = -1 + 3i \Leftrightarrow z = \frac{-1 + 3i}{3 - 6i}$.

On met alors $\frac{-1 + 3i}{3 - 6i}$ sous forme algébrique.

$$\frac{-1 + 3i}{3 - 6i} = \frac{(-1 + 3i)(3 + 6i)}{(3 - 6i)(3 + 6i)} = \frac{-3 - 6i + 9i - 18}{3^2 - (6i)^2} = \frac{-21 + 3i}{45} = -\frac{7}{15} + \frac{i}{15}.$$

La solution de cette équation est donc $-\frac{7}{15} + \frac{i}{15}$.

- Voyons d'abord quand le dénominateur s'annule. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $iz - 1 = 0 \Leftrightarrow iz = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{i} \Leftrightarrow z = -i$. Soit donc $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

$$\frac{z - i}{iz - 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(z - i) = iz - 1 \Leftrightarrow 3z - iz = -1 + 3i \Leftrightarrow (3 - i)z = (-1 + 3i) \Leftrightarrow z = \frac{-1 + 3i}{3 - i}.$$

On met alors $\frac{-1 + 3i}{3 - i}$ sous forme algébrique.

$$\frac{-1 + 3i}{3 - i} = \frac{(-1 + 3i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{-3 - i + 9i - 3}{3^2 - i^2} = \frac{-6 + 8i}{10} = -\frac{3}{5} + \frac{4i}{5}.$$

La solution de cette équation est donc $-\frac{3}{5} + \frac{4i}{5}$.

► Correction de l'exercice 16 – Voir l'énoncé

Supposons qu'il existe un complexe z différent de 1 tel que $\frac{2 - iz}{1 - z} = i$.

On a alors $2 - iz = i(1 - z)$ et donc $2 - iz = i - iz$ et finalement $2 = i$. C'est absurde ! Ainsi, pour tout complexe z différent de 1, $f(z)$ est différent de i .

Soit Z un complexe différent de i et z un complexe différent de 1.

$$f(z) = Z \Leftrightarrow \frac{2 - iz}{1 - z} = Z \Leftrightarrow 2 - iz = Z(1 - z) \Leftrightarrow zZ - iz = Z - 2 \Leftrightarrow z(Z - i) = Z - 2 \Leftrightarrow z = \frac{Z - 2}{Z - i}.$$

► Correction de l'exercice 17 – Voir l'énoncé

Méthode 1 : D'après le cours, on sait que $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$. Or, on a vu plus tôt dans un exercice que pour tout complexe

Z , $Z + \bar{Z} = \operatorname{Re}(Z)$. En particulier, $Z + \bar{Z}$ est réel. $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$ est donc un réel.

Méthode 2 : Soit $z = a + ib$ un complexe,

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a + ib} + \frac{1}{a - ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} + \frac{a + ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{2a}{a^2 + b^2}.$$

Ainsi, a et b étant réels, $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$ est aussi un réel.

► Correction de l'exercice 18 – Voir l'énoncé

D'une part,

$$j^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi, $j^2 = \bar{j}$. De plus,

$$j^3 = j^2 \times j = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

On a donc $j^3 = 1$, soit $j^2 \times j = 1$ et donc $j^2 = \frac{1}{j}$.

► Correction de l'exercice 19 – Voir l'énoncé

1. On a

$$\bullet z_1 = \frac{1-6}{1+i} = \frac{-5(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-5+5i}{1^2-i^2} = -\frac{5}{2} + \frac{5i}{2}.$$

$$\bullet z_2 = \frac{-\frac{5}{2} + \frac{5i}{2} - 6}{1+i} = \frac{\left(-\frac{17}{2} + \frac{5i}{2}\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{17}{2} + \frac{17i}{2} + \frac{5i}{2} + \frac{5}{2}\right) = -3 + \frac{11i}{2}.$$

2. (a) Pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = z_{n+1} - 6i = \frac{z_n - 6}{1+i} - 6i = \frac{z_n - 6 - 6i(1+i)}{1+i} = \frac{z_n - 6 - 6i + 6}{1+i} = \frac{z_n - 6i}{1+i} = \frac{u_n}{1+i}$$

La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{1+i}$.

(b) On sait que $u_0 = z_0 - 6i = 1 - 6i$. Pour tout entier naturel n , on a donc $u_n = \frac{1-6i}{(1+i)^n}$ et donc

$$z_n = u_n + 6i = \frac{1-6i}{(1+i)^n} + 6i.$$

3. (a) Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $P(n) : t_n = \overline{z_n}$.

• **Initialisation** : On a $t_0 = 1$ et $z_0 = 1$. Ainsi, $t_0 = \overline{z_0}$. $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a donc $t_n = \overline{z_n}$. Or,

$$t_{n+1} = \frac{t_n - 6}{1-i} = \frac{\overline{z_n} - 6}{1-i} = \frac{\overline{z_n - 6}}{1-i} = \overline{\left(\frac{z_n - 6}{1+i}\right)} = \overline{\frac{z_n - 6}{1+i}} = \overline{z_{n+1}}$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

(b) Pour tout entier naturel n ,

$$t_n = \overline{z_n} = \overline{\frac{1-6i}{(1+i)^n} + 6i} = \frac{1+6i}{(1-i)^n} - 6i.$$

► Correction de l'exercice 20 – Voir l'énoncé

$$\text{On a } f(1+2i) = \frac{1+2i-i}{1+2i+i} = \frac{1+i}{1+3i} = \frac{(1+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i+i+3}{1^2-(3i)^2} = \frac{4}{10} - \frac{2i}{10} = \frac{2}{5} - \frac{i}{5}.$$

Supposons qu'il existe un complexe z différent de $-i$ tel que $f(z) = 1$.

On a alors $\frac{z-i}{z+i} = 1$ et donc $z-i = z+i$ et finalement $2i = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, pour tout complexe $z \neq -i$, $f(z) \neq 1$.

Soit Z un complexe différent de 1 et z un complexe différent de $-i$,

$$f(z) = Z \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+i} = Z \Leftrightarrow z-i = Z(z+i) \Leftrightarrow z-zZ = i+Zi \Leftrightarrow z(1-Z) = i+Zi \Leftrightarrow z = \frac{i(1+Z)}{1-Z}.$$

Soit x un réel. On a alors $\bar{x} = x$. Ainsi, $f(x) \times \overline{f(x)} = \frac{x-i}{x+i} \times \overline{\left(\frac{x-i}{x+i}\right)} = \frac{x-i}{x+i} \times \frac{x+i}{x-i} = 1$.

Soit z un complexe différent de $-i$ tel que $f(z) \times \overline{f(z)} = 1$.

On a alors $\frac{z-i}{z+i} \times \overline{\left(\frac{z-i}{z+i}\right)} = 1$ et donc $\frac{z-i}{z+i} \times \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i} = 1$.

En développant, on obtient que $\frac{z\bar{z} - i\bar{z} + iz + 1}{z\bar{z} + i\bar{z} - iz + 1} = 1$ et donc $z\bar{z} - i\bar{z} + iz + 1 = z\bar{z} + i\bar{z} - iz + 1$.

On en déduit que $2i(z - \bar{z}) = 0$. Or, $z - \bar{z} = \frac{Im(z)}{2i}$. Ainsi $Im(z) = 0$. z est donc un réel.

► Correction de l'exercice 21 – Voir l'énoncé

- Le discriminant de $z^2 - 2z + 5$ vaut $(-2)^2 - 4 \times 5 = -16 < 0$. L'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$ admet donc deux solutions complexes conjuguées qui sont $z_1 = \frac{-(-2) + i\sqrt{16}}{2} = 1 + 2i$ et $z_2 = 1 - 2i$.
- Les solutions de $z^2 = -9$ sont $z_1 = 3i$ et $z_2 = -3i$.
- Remarquons que $3 - \pi < 0$. On a $2z^2 = 3 - \pi$ si et seulement si $z^2 = \frac{3 - \pi}{2}$ et donc $z = i\sqrt{\frac{\pi - 3}{2}}$ ou $z = -i\sqrt{\frac{\pi - 3}{2}}$.
- Le discriminant de $4z^2 + 3z + 2$ vaut $3^2 - 4 \times 4 \times 2 = 23$. L'équation $4z^2 + 3z + 2 = 0$ admet donc deux solutions complexes conjuguées qui sont $z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{23}}{8}$ et $z_2 = \frac{-3 - i\sqrt{23}}{8}$.
- On a $z^3 + 2z^2 + 3z = 0$ si et seulement si $z(z^2 + 2z + 3) = 0$, c'est-à-dire $z = 0$ ou $z^2 + 2z + 3 = 0$. Le discriminant de $z^2 + 2z + 3$ vaut $2^2 - 4 \times 3 \times 1 = -8 < 0$. L'équation $z^2 + 2z + 3 = 0$ admet donc deux solutions complexes conjuguées qui sont $z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{8}}{2 \times 1} = -1 - i\sqrt{2}$ et $z_2 = -1 + i\sqrt{2}$. Les solutions de l'équation $z^3 + 2z^2 + 3z = 0$ sont donc $0, -1 - i\sqrt{2}$ et $-1 + i\sqrt{2}$.
- On a $z^2 + 3 = 0$ si et seulement si $z^2 = -3$ soit $z = i\sqrt{3}$ ou $z = -i\sqrt{3}$. Par ailleurs, $z^2 + z + 1$ est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. Ce polynôme admet donc deux racines complexes conjuguées qui sont $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.
Les solutions de l'équation sont donc $-i\sqrt{3}, i\sqrt{3}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

► Correction de l'exercice 22 – Voir l'énoncé

Notons z_1 et z_2 les deux nombres recherchés. On a alors $z_1 + z_2 = 5$ et donc $z_1 = 5 - z_2$. De plus, on a $z_1 z_2 = 12$ soit $(5 - z_2)z_2 = 12$ et donc $-z_2^2 + 5z_2 - 12 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré. Le discriminant du polynôme $-z^2 + 5z - 12$ vaut $5^2 - 4 \times (-12) \times (-1) = -23 < 0$. Ce polynôme admet donc deux racines complexes conjuguées $\frac{-5 - i\sqrt{23}}{-2}$ et $\frac{-5 + i\sqrt{23}}{-2}$. Ces deux racines sont les nombres recherchés.

► **Correction de l'exercice 23 – Voir l'énoncé**

Posons $Z = z^2$. On a $z^4 + 2z^2 - 8 = 0$ si et seulement si $Z^2 + 2Z - 8 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré dont les solutions sont réelles et valent -4 et 2 .

Ainsi, $z^4 + 2z^2 - 8 = 0$ si et seulement si $z^2 = -4$ ou $z^2 = 2$. Les solutions de cette équation sont donc $2i$, $-2i$, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

► **Correction de l'exercice 24 – Voir l'énoncé**

Remarquons que $P(1) = 0$.

On a alors $(z - 1)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b - a)z^2 + (c - b)z - c$. Ainsi, $P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c)$ si et seulement si $a = 1$, $b - a = -3$, $c - b = 7$ et $-c = -5$ soit $a = 1$, $b = -2$ et $c = 5$.

Ainsi, pour tout complexe z , $P(z) = (z - 1)(z^2 - 2z + 5)$.

$z^2 - 2z + 5$ est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $(-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$. Ses racines sont donc $\frac{-(-2) \pm i\sqrt{16}}{2 \times 1} = 1 + 2i$ et $1 - 2i$.

Les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont donc 1 , $1 + 2i$ et $1 - 2i$.

► **Correction de l'exercice 25 – Voir l'énoncé**

Le discriminant de $z^2 + 2z \cos(x) + 1$ vaut $(2 \cos(x))^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4(\cos^2(x) - 1) = -4 \sin^2(x) < 0$ puisque $x \in]0; \pi[$. De plus, sur cet intervalle, on a $\sin(x) > 0$.

Les racines de ce polynôme sont donc $\frac{-2 \cos(x) \pm i\sqrt{4 \sin^2(x)}}{2 \times 1} = -\cos(x) + i \sin(x)$ et $-\cos(x) - i \sin(x)$.