Nombres réels

Calcul numérique

▶ Exercice 1 : Calcul de fractions – Voir le corrigé

Calculer les expressions suivantes. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$A = \frac{4}{3} + \frac{5}{2}$ $\quad B = 3 - \frac{5}{4}$ $\quad C = \frac{\frac{9}{8}}{3}$ $\quad D = \frac{14}{27} \times \frac{63}{49}$.

$E = \frac{\frac{1}{3}+1}{2-\frac{1}{3}}$ $\quad F = 5 \times \frac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}$ $\quad G = \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{10}}$ $\quad H = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$

▶ Exercice 2 : Calcul de puissances – Voir le corrigé

Soit x un réel non nul. Simplifier les expressions suivantes.

$A = x^5 \times x^3$ $\quad B = x^6 \times x^{-2}$ $\quad C = \frac{x^9}{x^3}$ $\quad D = \frac{x^{-2}}{x^5}$

$E = x^3 \times x^7 \times x^{-4}$ $\quad F = \frac{x^2 \times x^{-1}}{x^4 \times x^3}$ $\quad G = (x^3 \times x^2)^4$ $\quad H = \left((x^2)^6\right)^3$

$I = \frac{x^5 \times x^{-2}}{x^7}$ $\quad J = \frac{(x^2)^4 \times x^3}{x^{-5} \times x^4}$ $\quad K = \frac{(x^2 \times x^3)^4}{x^{-5}}$ $\quad L = \left(\frac{x^3 \times x}{x^{-2} \times (x^3)^{-1}}\right)^2$

$M = (2x)^3 \times (3x)^2$ $\quad N = \frac{(5x)^4}{50x^3}$ $\quad O = \frac{(2x)^3 \times 3x^2}{(3x)^2 \times x^4}$ $\quad P = \left(\frac{x^2 \times (3x)^2}{x \times (2x)^{-2}}\right)^2$

▶ Exercice 3 : Avec des racines carrées – Voir le corrigé

Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec a, b et c des entiers et où c est le plus petit possible.

$A = \sqrt{54} - 3\sqrt{96} - 5\sqrt{24}$ $\quad B = 2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{125}$

$C = (3\sqrt{10} - 5\sqrt{3})(3\sqrt{10} + 5\sqrt{3})$ $\quad D = (3\sqrt{5} + 2\sqrt{6})^2$

▶ Exercice 4 : Quantité conjuguée – Voir le corrigé

En utilisant la quantité conjuguée, exprimer les nombres suivants sans racine carrée au dénominateur.

$A = \frac{3}{1+\sqrt{2}}$ $\quad B = \frac{\sqrt{5}}{2-3\sqrt{5}}$ $\quad C = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad D = \frac{3}{\sqrt{3}-1}$

▶ Exercice 5 : Racine avec une racine – Voir le corrigé

Donner une expression de la forme $a + b\sqrt{3}$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ du nombre $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

Développement, factorisation

► Exercice 6 : Développer – Voir le corrigé

Soit x un réel. Développer et réduire les expressions littérales suivantes.

$A = (2x+3)(4x+1)$ $\quad B = (5x+2)(3x-1)$ $\quad C = \left(\frac{1}{5}x+\frac{1}{10}\right)\left(\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}\right)$

$D = 4(2x+1)(3x+2)+2x-3$ $\quad E = (7x-5)^2$ $\quad F = (8-4x)(4x+8)$

$G = \left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}\right)^2$ $\quad H = (x+3)^2-(x+1)^2$ $\quad I = (x+2)(x-2)-(2x+4)^2$

► Exercice 7 : Factoriser – Voir le corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes.

$A = (2x+3)(3x-1)+(2x+3)(4x+1)$ $\quad B = (5x+2)(3x-1)-(4x+1)(5x+2)$

$C = (2y-1)^2+(2y-1)(y+2)$ $\quad D = (3x+2)(7x-5)-(3x+2)^2$

$E = 4-81x^2$ $\quad F = 4x^2+4x+1$

$G = (2x+3)^2-(3x+2)^2$ $\quad H = (2x+7)(x+2)+2x+7$

► Exercice 8 : Établir un résultat – Voir le corrigé

1. En développant et réduisant cette expression, montrer que :

$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ \frac{1}{4}((a+b)^2-(a-b)^2) = ab$$

2. Retrouver ce résultat à l'aide d'une factorisation.

Équations et inéquations

► Exercice 9 : Résolution d'équations – Voir le corrigé

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$. On prendra bien soin, si nécessaire, de déterminer le domaine de définition pour chaque équation.

a. $7x-5 = 2x+8$ $\quad$ **b.** $5(2x+1) = (2x+1)(x+2)$ $\quad$ **c.** $\frac{2}{x-3} = \frac{1}{x+1}$.

d. $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{x}$ $\quad$ **e.** $\frac{x^2-2}{x+1} = x+4$ $\quad$ **f.** $\frac{x+2}{2x-3} = \frac{2x-3}{x+2}$

► Exercice 10 : Résolutions d'inéquations – Voir le corrigé

Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$.

a. $4x+1 \leqslant 7x-8$ $\quad$ **b.** $(3x+2)(5x-1) > 0$ $\quad$ **c.** $\frac{(x+1)(x-3)}{2x+5} \geqslant 0$.

d. $2x^2-4x+7 < 0$ $\quad$ **e.** $\frac{2x+3}{x-2} \leqslant \frac{x-1}{x+4}$ $\quad$ **f.** $x^3-x \leqslant 2x^2-2$

► Exercice 11 : Nombre de solutions – Voir le corrigé

Soit m un réel.

Déterminer, selon la valeur de m, le nombre de solutions de l'équation $mx^2+(m+2)x+\frac{9}{4} = 0$, d'inconnue réelle x.

Valeur absolue et partie entière

► Exercice 12 : Équations avec des valeurs absolues – Voir le corrigé

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$

$|5x+7| = 3$ $\qquad$ $|2x+4| - |x+1| = 4$ $\qquad$ $|1-3x| = -x^2+2x+5$

► Exercice 13 : Inéquations avec des valeurs absolues – Voir le corrigé

Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$

$|3x+1| \leqslant 2$ $\qquad$ $|x+1| \leqslant |2x-3|$ $\qquad$ $|x+3| + |x+5| < 1$

► Exercice 14 : Montrer une inégalité – Voir le corrigé

Montrer la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leqslant x^2 - x + 1.$$

► Exercice 15 : Maximum et minimum – Voir le corrigé

Pour tout réel x et y, on note $\max(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant y \\ y & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer, en raisonnant par disjonction de cas, la proposition :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$$

2. Donner une expression analogue pour $\min(x,y)$ de la démontrer.

► Exercice 16 : Démontrer l'inégalité triangulaire – Voir le corrigé

L'objectif de cet exercice est de démontrer l'inégalité triangulaire :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x+y| \leqslant |x| + |y|$$

On rappelle pour cet exercice que si a et b sont deux réels positifs tels que $a \leqslant b$, alors $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$ (c'est la croissance de la fonction Racine carrée sur $\mathbb{R}_+$). Soit donc x et y deux réels.

1. Développer et réduire l'expression $|x+y|^2 - (|x|+|y|)^2$.
2. Justifier que pour tout réel a, on a $a \leqslant |a|$.
3. Conclure.

► Exercice 17 : Une inégalité – Voir le corrigé

Montrer que pour tous réels x, y et z, on a $|x-z| \leqslant |x-y| + |y-z|$.

► Exercice 18 : Un peu de partie entière – Voir le corrigé

Résoudre les équations et inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$.

a. $\lfloor x \rfloor = 3$ $\qquad$ **b.** $\lfloor 2x+3 \rfloor = 9$ $\qquad$ **c.** $\lfloor 5x+1 \rfloor \leqslant \dfrac{10}{7}$

► Exercice 19 : Partie entière et opposé – Voir le corrigé

Soit x un réel. Que vaut $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$?

Corrections

► Correction 1 – Voir l'énoncé

$A = \frac{4\times2}{3\times2} + \frac{5\times3}{2\times3} = \frac{8+15}{6} = \frac{23}{6}$; $B = \frac{12}{4} - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$; $C = \frac{9}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{3\times3}{3\times8} = \frac{3}{8}$;

$D = \frac{2\times7\times9\times7}{3\times9\times7\times7} = \frac{2}{3}$; $E = \frac{\frac{1}{3}+\frac{3}{3}}{\frac{6}{3}-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{3}\times\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$; $F = 5\times\frac{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{4}{4}+\frac{1}{4}} = 5\times\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = 5\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{5} = \frac{3}{8}$;

$G = \frac{\frac{4}{6}-\frac{1}{6}}{\frac{4}{10}+\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{5}{10}} = \frac{3}{6}\times\frac{10}{5} = \frac{1}{2}\times2 = 1$; $H = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{2}{3}} = \dfrac{1}{\dfrac{3}{3}+\dfrac{2}{3}} = \dfrac{1}{\dfrac{5}{3}} = \dfrac{3}{5}$.

► Correction 2 – Voir l'énoncé

$A = x^5\times x^3 = x^{5+3} = x^8$; $B = x^6\times x^{-2} = x^{6+(-2)} = x^4$; $C = \dfrac{x^9}{x^3} = x^{9-3} = x^6$;

$D = \dfrac{x^{-2}}{x^5} = x^{-2-5} = x^{-7}$; $E = x^3\times x^7\times x^{-4} = x^{3+7+(-4)} = x^6$; $F = x^{2+(-1)-4-3} = x^{-6}$;

$G = (x^{3+2})^4 = (x^5)^4 = x^{5\times4} = x^{20}$; $H = \left((x^2)^6\right)^3 = x^{2\times6\times3} = x^{36}$; $I = x^{5+(-2)-7} = x^{-4}$;

$J = x^{2\times4+3-(-5)-4} = x^{12}$; $K = x^{(2+3)\times4-(-5)} = x^{25}$; $L = x^{(3+1-(-2)-3\times(-1))\times2} = x^6$;

$M = 2^3\times x^3\times3^2\times x^2 = 8\times9\times x^{3+2} = 72x^5$; $N = \dfrac{5^4x^4}{25\times2x^3} = \dfrac{25\times25}{2\times25}x^{4-3} = \dfrac{25}{2}x$;

$O = \dfrac{2^3\times x^3\times3x^2}{3^2\times x^2\times x^4} = \dfrac{8}{3}x^{3+2-2-4} = \dfrac{8}{3}x^{-1} = \dfrac{8}{3x}$;

$P = \left(\dfrac{x^2\times3^2x^2}{x\times2^{-2}x^{-2}}\right)^2 = \left(\dfrac{9}{\frac{1}{2^2}}x^{2+2-1-(-2)}\right)^2 = (36x^5)^2 = 36^2x^{2\times5} = 1296x^{10}$.

► Correction 3 – Voir l'énoncé

On a

$A = \sqrt{6\times9} - 3\sqrt{6\times16} - 5\sqrt{6\times4} = \sqrt{9}\sqrt{6} - 3\sqrt{16}\sqrt{6} - 5\sqrt{4}\sqrt{6} = 3\sqrt{6} - 3\times4\sqrt{6} - 5\times2\sqrt{6} = -19\sqrt{9}$.

$B = 2\sqrt{4\times5} - \sqrt{9\times5} + \sqrt{25\times5} = 2\sqrt{4}\sqrt{5} - \sqrt{9}\sqrt{5} + \sqrt{25}\sqrt{5} = 2\times2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$.

Pour C, on utilise une identité remarquable,

$C = (3\sqrt{10})^2 - (5\sqrt{3})^2 = 3^2\sqrt{10}^2 - 5^2\sqrt{3}^2 = 9\times10 - 25\times3 = 25$.

Pour D, on utilise également une identité remarquable,

$D = (3\sqrt{5})^2 + 2\times3\sqrt{5}\times2\sqrt{6} + (2\sqrt{6})^2 = 3^2\sqrt{5}^2 + 12\sqrt{5\times6} + 2^2\sqrt{6}^2 = 9\times5 + 12\sqrt{30} + 4\times6 = 69 + 12\sqrt{30}$.

► Correction 4 – Voir l'énoncé

On a

$$A = \frac{3(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{3-3\sqrt{2}}{1^2-\sqrt{2}^2} = \frac{3-3\sqrt{2}}{1-2} = \frac{3-3\sqrt{2}}{-1} = 3\sqrt{2}-3.$$

$$B=\frac{\sqrt{5}(2+3\sqrt{5})}{(2-3\sqrt{5})(2+3\sqrt{5})}=\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{5}\sqrt{5}}{2^2-(3\sqrt{5})^2}=\frac{2\sqrt{5}+3\times 5}{4-3^2\sqrt{5}^2}=\frac{15+2\sqrt{5}}{4-9\times 5}=-\frac{15+2\sqrt{5}}{41}.$$

$$C=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$D=\frac{3(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{3\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}^2-1^2}=\frac{3\sqrt{3}+3}{3-1}=\frac{3\sqrt{3}+3}{2}.$$

► Correction 5 – Voir l'énoncé

Soit a et b deux entiers naturels. On a

$$(a+b\sqrt{3})^2=a^2+2ab\sqrt{3}+(b\sqrt{3})^2=a^2+3b^2+2ab\sqrt{3}.$$

Supposons que $(a+b\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$. On a alors $a^2+3b^2+2ab\sqrt{3}=7+4\sqrt{3}$ et donc $a^2+3b^2-7=(4-2ab)\sqrt{3}$.

Puisque $\sqrt{3}$ est irrationnel, on a nécessairement $4-2ab=0$ (sinon on peut écrire $\sqrt{3}=\dfrac{a^2+3b^2-7}{4-2ab}$).

On a donc $4-2ab=0$, c'ets-à-dire $2ab=4$ et $ab=2$. Puisque a et b sont des entiers naturels, on a donc $a=1$ et $b=2$ ou $a=2$ et $b=1$.

Réciproquement, on a

- $(1+2\sqrt{3})^2=1+2\times 1\times 2\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2=1+4\sqrt{3}+4\times 3=13+4\sqrt{3}$.
- $(2+\sqrt{3})^2=2+2\times 2\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$.

Conclusion : Finalement, on a $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$.

On aurait pu aussi remarquer que $7+4\sqrt{3}=4+2\times 2\times\sqrt{3}+3=(2+\sqrt{3})^2$.

► Correction 6 – Voir l'énoncé

On a

$$\begin{aligned}A&=2x\cdot 4x+2x\cdot 1+3\cdot 4x+3\cdot 1\\&=8x^2+2x+12x+3\\&=8x^2+14x+3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C&=\tfrac{1}{5}x\cdot\tfrac{2}{5}x+\tfrac{1}{5}x\cdot\tfrac{3}{10}+\tfrac{1}{10}\cdot\tfrac{2}{5}x+\tfrac{1}{10}\cdot\tfrac{3}{10}\\&=\tfrac{2}{25}x^2+\tfrac{3}{50}x+\tfrac{1}{25}x+\tfrac{3}{100}\\&=\tfrac{2}{25}x^2+\tfrac{1}{10}x+\tfrac{3}{100}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E&=(7x)^2-2\times 7x\times 5+5^2\\&=49x^2-70x+25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G&=\left(\tfrac{2}{3}x+\tfrac{1}{5}\right)^2\\&=\left(\tfrac{2}{3}x\right)^2+2\cdot\tfrac{2}{3}x\cdot\tfrac{1}{5}+\left(\tfrac{1}{5}\right)^2\\&=\tfrac{4}{9}x^2+\tfrac{4}{15}x+\tfrac{1}{25}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=5x\cdot 3x+5x\cdot(-1)+2\cdot 3x+2\cdot(-1)\\&=15x^2-5x+6x-2\\&=15x^2+x-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D&=4(2x+1)(3x+2)+2x-3\\&=4(6x^2+7x+2)+2x-3\\&=24x^2+28x+8+2x-3\\&=24x^2+30x+5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F&=(8-4x)(8+4x)\\&=8^2-(4x)^2\\&=-16x^2+64\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H&=(x+3)^2-(x+1)^2\\&=x^2+6x+9-(x^2+2x+1)\\&=x^2+6x+9-x^2-2x-1\\&=4x+8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= (x+2)(x-2)-(2x+4)^2 \\ &= (x^2-4)-(4x^2+16x+16) \\ &= x^2-4-4x^2-16x-16 \\ &= -3x^2-16x-20 \end{aligned}$$

► Correction 7 – Voir l'énoncé

On a

$$\begin{aligned} A &= (2x+3)(3x-1)+(2x+3)(4x+1) \\ &= (2x+3)\big((3x-1)+(4x+1)\big) \\ &= 7x(2x+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (5x+2)(3x-1)-(4x+1)(5x+2) \\ &= (5x+2)\big((3x-1)-(4x+1)\big) \\ &= (5x+2)(3x-1-4x-1) \\ &= (5x+2)(-x-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (2y-1)^2+(2y-1)(y+2) \\ &= (2y-1)\big((2y-1)+(y+2)\big) \\ &= (2y-1)(3y+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= (3x+2)(7x-5)-(3x+2)^2 \\ &= (3x+2)\big((7x-5)-(3x+2)\big) \\ &= (3x+2)(4x-7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= 4-81x^2 \\ &= 2^2-(9x)^2 \\ &= (2-9x)(2+9x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 4x^2+4x+1 \\ &= (2x)^2+2\cdot 2x\cdot 1+1^2 \\ &= (2x+1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= (2x+3)^2-(3x+2)^2 \\ &= \big((2x+3)-(3x+2)\big)\big((2x+3)+(3x+2)\big) \\ &= (-x+1)(5x+5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= (2x+7)(x+2)+2x+7 \\ &= (2x+7)(x+2+1) \\ &= (2x+7)(x+3) \end{aligned}$$

► Correction 8 – Voir l'énoncé

Soit a et b deux réels. On a

$$\frac{1}{4}((a+b)^2-(a-b)^2)=\frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2))=\frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2)=\frac{1}{4}\times 4ab=ab.$$

On peut également factoriser

$$\frac{1}{4}((a+b)^2-(a-b)^2)=\frac{1}{4}(a+b+a-b)(a+b-(a-b))=\frac{1}{4}\times 2a\times 2b=ab.$$

► Correction 9 – Voir l'énoncé

a. Soit x un réel. On a

$$7x-5=2x+8 \Leftrightarrow 7x-2x=8+5 \Leftrightarrow 5x=13 \Leftrightarrow x=\frac{13}{5}.$$

b. Soit x un réel. On a

$$5(2x+1)=(2x+1)(x+2) \Leftrightarrow 5(2x+1)-(2x+1)(x+2)=0 \Leftrightarrow (2x+1)\big(5-(x+2)\big)=0$$

Ainsi,

$$5(2x+1)=(2x+1)(x+2) \Leftrightarrow (2x+1)(3-x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x=3.$$

c. Soit x un réel différent de 3 et de -1. On a

$$\frac{2}{x-3}=\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow 2(x+1)=1(x-3)\quad(\text{Domaine : } x\neq 3, x\neq -1)$$

Ainsi,

$$\frac{2}{x-3}=\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow 2x+2=x-3\Leftrightarrow 2x-x=-3-2\Leftrightarrow x=-5$$

d. Soit x un réel différent de 0 et de -2. On a

$$\frac{x}{x+2}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x\cdot x=1\cdot(x+2)\quad(\text{Domaine : } x\neq 0, x\neq -2)$$

Ainsi,

$$\frac{x}{x+2}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x^2=x+2\Leftrightarrow x^2-x-2=0$$

Il s'agit d'une équation du second degré dont les solutions sont -1 et 2.

e. Soit x un réel différent de 1. On a

$$\frac{x^2-2}{x+1}=x+4\Leftrightarrow x^2-2=(x+1)(x+4)\quad(\text{Domaine : } x\neq -1).$$

Ainsi,

$$\frac{x^2-2}{x+1}=x+4\Leftrightarrow x^2-2=x^2+5x+4\Leftrightarrow x^2-x^2-5x=4+2\Leftrightarrow x=-\frac{6}{5}.$$

f. Soit x un réel différent de -2 et $\frac{3}{2}$. On a

$$\frac{x+2}{2x-3}=\frac{2x-3}{x+2}\Leftrightarrow (x+2)^2=(2x-3)^2\quad(\text{Domaine : } x\neq -2, x\neq \frac{3}{2}).$$

Ainsi,

$$\frac{x+2}{2x-3}=\frac{2x-3}{x+2}\Leftrightarrow (x-2)^2-(2x-3)^2=0\Leftrightarrow (x+2-(2x-3))(x+2+(2x-3))=0\quad(\text{identité remarquable })$$

et donc

$$\frac{x+2}{2x-3}=\frac{2x-3}{x+2}\Leftrightarrow (-x+5)(3x-1)=0\Leftrightarrow x=5\quad\text{ou}\quad x=\frac{1}{3}.$$

► Correction 10 – Voir l'énoncé

a. Soit x un réel. On a

$$4x+1\leqslant 7x-8\Leftrightarrow 4x-7x\leq -8-1\Leftrightarrow -3x\leq -9\Leftrightarrow x\geq 3.$$

On n'oublie pas d'inverser le sens de la dernière inégalité car on a multiplié par -1 qui est négatif.

Solution : $S=[3,+\infty[$

b. Soit x un réel. Résolvons $(3x+2)(5x-1)>0$:

On a : $3x+2=0\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$, $\quad 5x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$

Construisons alors le tableau de signes de $(3x+2)(5x-1)$.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(3x+2)(5x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Solution : $x \in \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{5}, +\infty\right[$

c. Résolvons $\dfrac{(x+1)(x-3)}{2x+5} \geqslant 0$

Soit x un réel. On a $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$, $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$, $2x+5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$

Construisons le tableau de signe de $\dfrac{(x+1)(x-3)}{2x+5}$.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{(x+1)(x-3)}{2x+5}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Solution : $x \in \left]-\dfrac{5}{2}, -1\right] \cup [3, +\infty[$

d. Résolvons $2x^2-4x+7<0$:

Le discriminant du polynôme $2x^2-4x+7$ vaut : $(-4)^2-4\cdot 2\cdot 7 = 16-56 = -40 < 0$.

Le coefficient dominant de ce polynôme vaut $2>0$. Ainsi, pour tout réel x, on a $2x^2-4x+7>0$. L'inéquation $2x^2-4x+7<0$ n'a **aucune solution**.

Solution : $S = \varnothing$

e. Résolvons $\dfrac{2x+3}{x-2} \leqslant \dfrac{x-1}{x+4}$

Soit x un réel avec $x \neq 2$ et $x \neq -4$. On a

$$\frac{2x+3}{x-2} - \frac{x-1}{x+4} = \frac{(2x+3)(x+4)-(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+4)} = \frac{(2x^2+11x+12)-(x^2-3x+2)}{(x-2)(x+4)} = \frac{x^2+14x+10}{(x-2)(x+4)}.$$

En utilisant le discriminant, on trouve que les solutions de l'équation $x^2+14x+10=0$ sont $-7-\sqrt{39}$ et $-7+\sqrt{39}$. Puisque le coefficient dominant, à savoir 1, est positif, le signe de $x^2+14x+10$ est positif à l'extérieur de ces racines et négatif à l'intérieur.

On peut en déduire le tableau de signes de $\frac{x^2+14x+10}{(x-2)(x+4)}$, après avoir pris soin de mettre les valeurs où les facteurs

s'annulent dans le bon ordre.

x	$-\infty$		$-7-\sqrt{39}$		-4		$-7+\sqrt{39}$		2		$+\infty$
$x^2+14x+10$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x^2+14x+10}{(x-2)(x+4)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Solution : $S=\left[-7-\sqrt{39},-4\right[\cup\left[-7+\sqrt{39},2\right[$

f. Soit x un réel. On a

$$x^3-x\leqslant 2x^2-2\Leftrightarrow x(x^2-1)\leqslant 2(x^2-1)\Leftrightarrow x(x^2-1)-2(x^2-1)\leqslant 0\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2)\leqslant 0$$

On construit alors le tableau de signe de $(x-1)(x+1)(x-2)$.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x+1)(x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Solution : $S=]-\infty;-1]\cup[1;2]$

► Correction 11 – Voir l'énoncé

Dans un premier temps, si $m=0$, l'équation devient $2x+\dfrac{9}{4}=0$, dont l'unique solution est $-\dfrac{9}{8}$.

Supposons désormais que $m\neq 0$. L'équation $mx^2+(m+2)x+\dfrac{9}{4}=0$ est une équation du second degré dont le discriminant, que l'on note Δ, vaut

$$\Delta=(m+2)^2-4\times m\times\frac{9}{4}=m^2+4m+4-9m=m^2-5m+4.$$

Le nombre de solutions de l'équation $mx^2+(m+2)x+\dfrac{9}{4}=0$ dépend alors du signe de ce discriminant, qui est lui même un polynôme du second degré.

Son discriminant vaut $(-5)^2+4\times 1\times 1=9$. L'équation $m^2-5m+4=0$ admet donc deux solutions qui sont $m_1=\dfrac{-(-5)-\sqrt{9}}{2\times 1}=1$ et $m_2=\dfrac{-(-5)+\sqrt{3}}{2\times 1}=4$.

On peut alors construire le tableau de signes de m^2-5m+4 selon les valeurs de m.

m	$-\infty$		1		4		$+\infty$
m^2-5m+4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : Ainsi,

- Si $m \in]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]4;+\infty[$, alors l'équation $mx^2+(m+2)x+\dfrac{9}{4}=0$ est une équation du second degré dont le discriminant est strictement positif, elle admet donc deux solutions ;
- Si $m=1$ ou $m=4$, alors l'équation $mx^2+(m+2)x+\dfrac{9}{4}=0$ est une équation du second degré dont le discriminant est nul, elle admet donc une solution ; Si $m \in]1;4[$, alors l'équation $mx^2+(m+2)x+\dfrac{9}{4}=0$ est une équation du second degré dont le discriminant est strictement négatif, elle n'admet donc aucune solution ;
- Si $m=0$, l'équation $mx^2+(m+2)x+\dfrac{9}{4}$ admet une seule solution.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

a. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$|5x+7|=3 \Leftrightarrow 5x+7=3 \text{ ou } 5x+7=-3 \Leftrightarrow x=-4/5 \text{ ou } x=-2.$$

Solution : $S=\left\{-\frac{4}{5};2\right\}$

b. Soit x un réel.

On a $|2x+4|=\begin{cases} 2x+4 & \text{si } 2x+4 \geqslant 0 \\ -(2x+4) & \text{sinon} \end{cases}$ c'est-à-dire $|2x+4|=\begin{cases} 2x+4 & \text{si } x \geqslant -2 \\ -2x-4 & \text{sinon.} \end{cases}$.

Par ailleurs, $|x+1|=\begin{cases} x+1 & \text{si } x+1 \geqslant 0 \\ -(x+1) & \text{sinon} \end{cases}$ c'est-à-dire $|x+1|=\begin{cases} x+1 & \text{si } x \geqslant -1 \\ -x-1 & \text{sinon.} \end{cases}$.

Rassemblons ces différentes valeurs dans un tableau.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$\lvert 2x+4\rvert$		$-2x-4$		$2x+4$		$2x+4$	
$\lvert x+1\rvert$		$-x-1$		$-x-1$		$x+1$	
$\lvert 2x+4\rvert-\lvert x+3\rvert$		$-x-3$		$3x+5$		$x+3$	

Nous pouvons alors résoudre l'équation de départ sur chaque intervalle donné par ce tableau. Il faut alors vérifier que la solution trouvée appartient bien à l'intervalle d'étude !

- Si $x \leqslant -2$, on a : $|2x+4|-|x+1|=4 \Leftrightarrow -x-3=4 \Leftrightarrow -x=7 \Leftrightarrow x=-7$.
  Puisque l'on a $-7 \leqslant -2$, le réel -7 est bien solution de notre équation.
- Si $-2 \leqslant x \leqslant -1$, on a : $|2x+4|-|x+3|=4 \Leftrightarrow 3x+5=4 \Leftrightarrow 3x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$.
  Or, $-\dfrac{1}{3}$ n'appartient pas à l'intervalle $[-2;-1]$, ce n'est donc pas une solution de notre équation.
- Si $x \geqslant -1$, on a : $|2x+4|-|x+3|=4 \Leftrightarrow x+3=4 \Leftrightarrow x=1$.
  Puisque l'on a $1 \geqslant -1$, le réel 1 est bien solution de notre équation.

Conclusion : Les solutions de l'équation $|2x+4|-|x+3|=4$ sont 1 et -7.

c. Soit x un réel.

On a $|1-3x| = \begin{cases} 1-3x & \text{si } 1-3x \geqslant 0 \\ -(1-3x) & \text{sinon} \end{cases}$ c'est-à-dire $|1-3x| = \begin{cases} 1-3x & \text{si } x \leqslant 1/3 \\ 3x-1 & \text{sinon.} \end{cases}$.

Supposons que $x \leqslant \frac{1}{3}$. On a alors

$$|1-3x| = -x^2+2x+5 \Leftrightarrow 1-3x = -x^2+2x+5 \Leftrightarrow x^2-5x-4=0$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré dont les racines sont $\dfrac{5-\sqrt{41}}{2}$ et $\dfrac{5+\sqrt{41}}{2}$. Or, $\dfrac{5+\sqrt{41}}{2} \geqslant \dfrac{5}{2} > \dfrac{1}{3}$, cette racine n'est donc pas dans le domaine qui nous intéresse. En revanche, on a $\dfrac{5-\sqrt{41}}{2} \leqslant 0 \leqslant \dfrac{1}{3}$, ce qui fournit une première solution à notre équation.

Supposons que $x \geqslant \frac{1}{3}$. On a alors

$$|1-3x| = -x^2+2x+5 \Leftrightarrow 3x-1 = -x^2+2x+5 \Leftrightarrow x^2+x-6=0$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré dont les racines sont -3 et 2. Or, $-3 < \dfrac{1}{3}$, cette racine n'est donc pas dans le domaine qui nous intéresse. En revanche, on a $2 \leqslant \dfrac{1}{3}$, ce qui fournit une deuxième solution à notre équation.

Conclusion : Les solutions de l'équation $|1-3x| = -x^2+2x+5$ sont 2 et $\dfrac{5-\sqrt{41}}{2}$.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

a. Soit x un réel. On a

$$|3x+1| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant 3x+1 \leqslant 2 \Leftrightarrow -3 \leqslant 3x \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}.$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'inéquation $|3x+1| \leqslant 2$ est $\left[-1;\frac{1}{3}\right]$.

b. Soit x un réel.

On a $|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x+1 \geqslant 0 \\ -(x+1) & \text{sinon} \end{cases}$ c'est-à-dire $|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geqslant -1 \\ -x-1 & \text{sinon.} \end{cases}$.

Par ailleurs, $|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } 2x-3 \geqslant 0 \\ -(2x-3) & \text{sinon} \end{cases}$ c'est-à-dire $|2x+4| = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \geqslant 3/2 \\ 3-2x & \text{sinon.} \end{cases}$.

On procède alors par disjonction de cas.

- Si $x \leqslant -1$, on a : $|x+1| \leqslant |2x-3| \Leftrightarrow -x-1 \leqslant 3-2x \Leftrightarrow x \leqslant 4$.
  Puisque l'on a supposé que $x \leqslant -1$, on a donc forcément $x \leqslant 4$. Ainsi, tout réel $x \leqslant -1$ est solution de l'inéquation.

- Si $-1 \leqslant x \leqslant 3/2$, on a : $|x+1| \leqslant |2x-3| \Leftrightarrow x+1 \leqslant 3-2x \Leftrightarrow 3x \leqslant 2 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{2}{3}$.
  Ainsi, les réels x vérifiant $-1 \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$ sont solutions de l'équation.

- Si $x \geqslant 3/2$, on a : $|x+1| \leqslant |2x-3| \Leftrightarrow x+1 \leqslant 2x-3 \Leftrightarrow 4 \leqslant x$.
  Ainsi, les réels x vérifiant $x \geqslant \frac{2}{3}$ sont solutions de l'équation.

Conclusion : L'ensemble des solutions de cette inéquation est $\left]-\infty;\frac{2}{3}\right] \cup [4;+\infty[$.

c. Soit x un réel.

On a $|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{si } x+3 \geqslant 0 \\ -(x+3) & \text{sinon} \end{cases}$ c'est-à-dire $|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \geqslant -3 \\ -x-3 & \text{sinon.} \end{cases}$.

Par ailleurs, $|x+5| = \begin{cases} x+5 & \text{si } x+3 \geqslant 0 \\ -(x+5) & \text{sinon} \end{cases}$ c'est-à-dire $|x+5| = \begin{cases} x+5 & \text{si } x \geqslant -5 \\ -x-5 & \text{sinon.} \end{cases}$.

On procède alors par disjonction de cas.

- Si $x \leqslant -5$, on a : $|x+3|+|x+5| < 1 \Leftrightarrow -x-3-x-5 < 1 \Leftrightarrow -2x < 9 \Leftrightarrow x > -9/2$.
  Puisque l'on a supposé que $x \leqslant -5$, on ne peut pas avoir $x > -9/2$. L'inéquation n'admet donc pas de solution sur $]-\infty;-5]$.

- Si $-5 \leqslant x \leqslant -3$, on a : $|x+3|+|x+5| < 1 \Leftrightarrow -x-3+x+5 < 1 \Leftrightarrow 2 < 1$.
  Ceci est impossible. L'inéquation n'admet donc pas de solution sur $[-5;-3]$.

- Si $x \geqslant -3$, on a : $|x+3|+|x+5| < 1 \Leftrightarrow x+3+x+5 < 1 \Leftrightarrow 2x < -7 \Leftrightarrow x < -7/2$.
  Puisque l'on a supposé que $x \geqslant -3$, on ne peut pas avoir $x > -7/2$. L'inéquation n'admet donc pas de solution sur $[-3;+\infty[$.

Conclusion : L'inéquation $|x+3|+|x+5| < 1$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$.

► Correction 14 – Voir l'énoncé

Soit x un réel.

On a $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x-1 \geqslant 0 \\ -(x-1) & \text{sinon} \end{cases}$ c'est-à-dire $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geqslant 1 \\ 1-x & \text{sinon.} \end{cases}$.

On raisonne alors par disjonction de cas.

- Si $x < 1$, alors $|x-1|-(x^2-x+1) = 1-x-x^2+x-1 = -x^2 \leqslant 0$.
  Ainsi, pour tout réel $x < -1$, on a $|x-1| \leqslant x^2-x+1$.
- Si $x \geqslant 1$, on a $|x-1|-(x^2-x+1) = x-1-x^2+x-1 = -x^2+2x-2$. Il s'agit d'un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $2^2-4\times(-1)\times(-2) = -4 < 0$. Ainsi, pour tout réel $x \geqslant 1$, on a $-x^2+2x-2 < 0$ et donc $|x-1|-(x^2-x+1) < 0$ soit $|x-1| < x^2-x+1$.

Conclusion : On a montré : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leqslant x^2-x+1$.

► Correction 15 – Voir l'énoncé

Soit x et y deux réels.

- Supposons que $x < y$. On a alors $\max(x,y) = y$. Par ailleurs, $x-y < 0$ et donc $|x-y| = -(x-y) = y-x$. Ainsi,

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+y-x) = \frac{1}{2}\times 2y = y = \max(x,y).$$

- Supposons que $x \geqslant y$. On a alors $\max(x,y) = x$. Par ailleurs, $x-y \geqslant 0$ et donc $|x-y| = x-y$. Ainsi,

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = \frac{1}{2}\times 2x = x = \max(x,y).$$

Conclusion : On a montré par disjonction de cas que : $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $\max(x,y) = \dfrac{1}{2}(x+y+|x-y|)$

Pour $\min(x,y)$, il est possible d'intuiter la formule... Ou de remarquer que pour tous réels x et y, on a $x+y = \max(x,y)+\min(x,y)$.

En effet, si $x < y$, alors $\max(x,y)+\min(x,y) = y+x = x+y$ et si $x \geqslant y$, alors $\max(x,y)+\min(x,y) = x+y$.
Ainsi, pour tous réels x et y,

$$\min(x,y) = x+y-\max(x,y) = x+y-\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}|x-y| = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

Conclusion : On a montré que : $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $\max(x,y) = \dfrac{1}{2}(x+y-|x-y|)$

► Correction 16 – Voir l'énoncé

Soit x et y deux réels. Remarquons que $|x+y|^2 = |(x+y)^2| = (x+y)^2$ puisque $(x+y)^2 \geqslant 0$. Ainsi,

$$|x+y|^2-(|x|+|y|)^2 = (x+y)^2-(|x|+|y|)^2 = a^2+2ab+b^2-(|x|^2+2|x|\cdot|y|+|y|^2).$$

Or, $|x|^2 = |x^2| = x^2$. De même, $|y|^2 = y^2$. Enfin, $|x|\cdot|y| = |xy|$. Ainsi,

$$|x+y|^2-(|x|+|y|)^2 = x^2+2xy+y^2-x^2-2|xy|-y^2 = 2(xy-|xy|).$$

Conclusion : Pour tous réels x et y, on a $|x+y|^2-(|x|+|y|)^2 = 2(xy-|xy|)$.

Soit a un réel.

- Si $a \geqslant 0$, alors $|a| = a$ et donc $a \leqslant |a|$.
- Si $a < 0$, alors $a \leqslant 0 \leqslant |a|$ et donc $a \leqslant |a|$.

Conclusion : On a montré par disjonction de cas que, pour tout réel a, on a $a \leqslant |a|$.

D'après la première question, on a, pour tous réels x et y,

$$|x+y|^2-(|x|+|y|)^2 = 2(xy-|xy|).$$

Or, la question précédente permet d'affirmer que, pour tous réels x et y, $xy \leqslant |xy|$ et donc $2(xy-|xy|) \leqslant 0$.
Ainsi, pour tous réels x et y, on a $|x+y|^2-(|x|+|y|)^2 \leqslant 0$ et donc $|x+y|^2 \leqslant (|x|+|y|)^2$.
On conclut alors en appliquant la fonction racine carrée, qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Conclusion : On a montré : $\forall x,y \in \mathbb{R},\ |x+y| \leqslant |x|+|y|$.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

Soit x, y et z des réels. On a alors $x-z = x-y+y-z$. Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|x-z| = |x-y+y-x| \leqslant |x-y|+|y-z|.$$

► Correction 18 – Voir l'énoncé

a. L'ensemble des solutions de l'équation $\lfloor x \rfloor = 3$ est l'intervalle $[3;4[$.

b. Soit x un réel. On a

$$\lfloor 2x+3 \rfloor = 9 \Leftrightarrow 9 \leqslant 2x+3 < 10 \Leftrightarrow 6 \leqslant 2x < 7 \Leftrightarrow 3 \leqslant x \leqslant \frac{7}{2}.$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'équation $\lfloor 2x+3 \rfloor = 9$ est l'intervalle $\left[3;\frac{7}{2}\right[$.

c. Soit x un réel. On a

$$\lfloor 5x+1 \rfloor \leqslant \frac{10}{7} \Leftrightarrow \lfloor 5x+1 \rfloor \leqslant 1 \Leftrightarrow 5x+1 < 2 \Leftrightarrow 5x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{5}.$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'inéquation $\lfloor 5x+1 \rfloor \leqslant \frac{10}{7}$ est l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{5}\right[$.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

Si x est un entier, $-x$ l'est aussi. On a alors $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = x - x = 0$.

Supposons désormais que x n'est pas entier. On a alors $x-1 < \lfloor x \rfloor < x$ et $-x-1 \lfloor -x \rfloor < -x$.

En additionnant ces deux inégalité, on a donc $-2 < \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor < 0$. Or, $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ est un entier. Ainsi, $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$.

Conclusion : Pour tout réel x, on a $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$