

Compléments sur la dérivation

1 Rappels sur la dérivation

1.1 Fonction dérivée

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I , $a \in I$ et h un réel non nul tel que $a + h \in I$.

- On dit que f est dérivable en a si le taux de variation $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Cette limite est appelée *nombre dérivé de f en a* et est notée $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$. On appelle alors *fonction dérivée de f sur I* la fonction

$$f' : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f'(x). \end{cases}$$

■ **Exemple 1 :** On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Soit x un réel et h un réel non nul.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

Lorsque h se rapproche de 0, cette quantité tend vers $2x$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = 2x$.

1.2 Dérivées usuelles

$f : x \mapsto$	Définie sur	Dérivable sur	$f' : x \mapsto$
$mx + p$, m et p réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	m
x^n pour $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$	$] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\exp(ax + b)$, a et b réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a \exp(ax + b)$

1.3 Opérations sur les dérivées

Théorème 1 : Soit I un intervalle, u et v deux fonctions dérivables sur I , k un réel. Alors les fonctions ku , $u+v$ et uv sont dérivables sur I . Si de plus, v ne s'annule pas sur I , alors la fonction $\frac{u}{v}$ est également dérivable sur I . On a alors

$$(ku)' = k u'$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

■ **Exemple 2 :** On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 3x + 1) \exp(3x + 1)$, définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x , on pose alors $u(x) = x^2 - 3x + 1$ et $v(x) = \exp(3x + 1)$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $u'(x) = 2x - 3$.
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $v'(x) = 3 \exp(3x + 1)$.

On a $f = uv$. Ainsi, f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a $f' = u'v + uv'$. Ainsi, pour tout réel x ,

$$f'(x) = (2x - 3) \times \exp(3x + 1) + (x^2 - 3x + 1) \times 3 \exp(3x + 1) = (3x^2 - 7x) \exp(3x + 1).$$

1.4 Tangente à la courbe

Définition 2 — Tangente à la courbe : Soit f une fonction dérivable en a . On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite de coefficient directeur $f'(a)$ et passant par le point de coordonnée $(a; f(a))$.

Propriété 1 : Soit f une fonction dérivable en a . La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

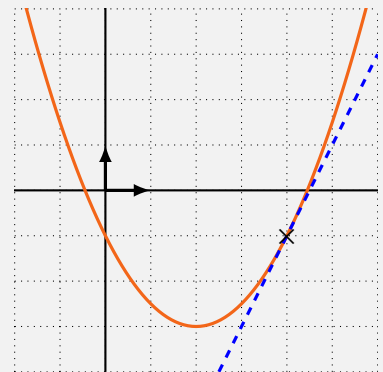
■ **Exemple 3 :** Pour tout réel x , posons $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x - 1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , on a $f'(x) = x - 2$

Déterminons l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4

- $f'(4) = 4 - 2 = 2$
- $f(4) = \frac{4^2}{2} - 2 \times 4 - 1 = -1$

Cette tangente a pour équation $y = f'(4) \times (x - 4) + f(4)$ soit $y = 2(x - 4) - 1$ et donc $y = 2x - 9$.



1.5 Variations d'une fonction

Propriété 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

■ **Exemple 4 :** On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 3x + 1) \exp(3x + 1)$ étudiée précédemment. On a vu que pour tout réel x , on a $f'(x) = (3x^2 - 7x) \exp(3x + 1) = x(3x - 7) \exp(3x + 1)$. $f'(x)$ étant écrite sous forme factorisée, on peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire les variations de f .

x	$-\infty$	0	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$3x - 7$	$-$	$-$	0	$+$
$\exp(3x + 1)$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	0	$+$
f				

2 Dérivée seconde

Définition 3 — Dérivée seconde : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa fonction dérivée f' est également dérivable sur I (on dit également que f est deux fois dérivable sur I).

On appelle fonction *dérivée seconde* de f la fonction dérivée de f' . Cette fonction est notée f'' .

Pour tout $x \in I$, $f''(x) = (f')'(x)$.

■ **Exemple 5 :** Pour tout réel x , on pose $f(x) = (2x + 1)e^{3x-2}$. Posons, pour tout réel x , $u_1(x) = 2x + 1$ et $v_1(x) = e^{3x-2}$.

- u_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $u_1'(x) = 2$.
- v_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $v_1'(x) = 3e^{3x-2}$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$f'(x) = u_1'(x) \times v_1(x) + u_1(x) \times v_1'(x) = 2 \times e^{3x-2} + (2x + 1) \times 3e^{3x-2} = (6x + 5)e^{3x-2}.$$

Posons alors, pour tout réel x , $u_2(x) = 6x + 5$ et $v_2(x) = e^{3x-2}$.

- u_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $u_2'(x) = 6$.
- v_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $v_2'(x) = 3e^{3x-2}$.

Ainsi, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$f''(x) = u'_2(x) \times v_2(x) + u_2(x) \times v'_2(x) = 6 \times e^{3x-2} + (6x+5) \times 3e^{3x-2} = (24x+21)e^{3x-2}.$$

3 Composition de fonctions

Définition 4 — Fonction composée : Soit I et J deux parties de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction définie sur J et g une fonction définie sur I telle que pour tout réel x , $g(x) \in J$.

On définit la *fonction composée* de f et g notée $f \circ g$ par

$$\text{Pour tout } x \in I, f \circ g(x) = f(g(x)).$$

L'idée derrière la composition de fonctions est simplement d'appliquer successivement plusieurs fonctions.

$$f \circ g : x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f[g(x)]$$

■ **Exemple 6 :** Pour tout réel x , on note $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 3$. Alors, pour tout réel x ,

- $f \circ g(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (x+3)^2$.
- $g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x) + 3 = x^2 + 3$.

Attention ! En général, on n'a pas $f \circ g = g \circ f$! Ces deux fonctions ne sont d'ailleurs pas forcément définies sur le même ensemble.

Propriété 3 : Soit I et J deux intervalles, f une fonction définie et dérivable sur J et g une fonction définie et dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $g(x) \in J$. Alors $f \circ g$ est dérivable et pour tout réel x dans I ,

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times (f' \circ g)(x).$$

■ **Exemple 7 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{x^2+3x-2}$. Pour tout réel x , on pose alors $u(x) = e^x$ et $v(x) = x^2 + 3x - 2$. Pour tout réel x , on a alors $f(x) = u(v(x)) = u \circ v(x)$.

- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $v'(x) = 2x + 3$
- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $u'(x) = e^x$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = (2x+3)e^{x^2+3x-2}.$$

Propriété 4 — Cas particuliers : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I

- Pour tout entier naturel n , u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u' \times e^u$.
- Si pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- Si pour tout réel x , $u(x) \neq 0$, $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

■ **Exemple 8 :** Pour tout réel x , posons $f(x) = (4x + 1)^9$.

Pour tout réel x , on pose $u(x) = 4x + 1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$. Or, $f = u^9$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 9 \times u' \times u^8$, c'est-à-dire que pour tout réel x , on a

$$f'(x) = 9 \times 4 \times (4x + 1)^{9-1} = 36 \times (4x + 1)^8.$$

■ **Exemple 9 :** Pour tout réel x , posons $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. Pour tout réel x , on pose alors $u(x) = x^2 + 1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas. Or, $f = \frac{1}{u}$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = -\frac{u'}{u^2}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

■ **Exemple 10 :** On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in [-2; 2]$ par $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Bien que la fonction f soit définie sur l'intervalle fermé $[-2; 2]$, elle n'est en revanche dérivable que sur l'intervalle ouvert $] - 2; 2[$. Pour tout réel $x \in] - 2; 2[$, on a

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$