Généralités sur les fonctions

Généralités sur les fonctions

▶ Exercice 1 – Voir le corrigé

Donner l'ensemble de définition ainsi qu'une implémentation en PYTHON des fonction suivantes.

$f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)-1}$ $\qquad$ $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{2x+1}}{x^2+5x+6}$ $\qquad$ $h : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x+1}{4-x}}$

▶ Exercice 2 – Voir le corrigé

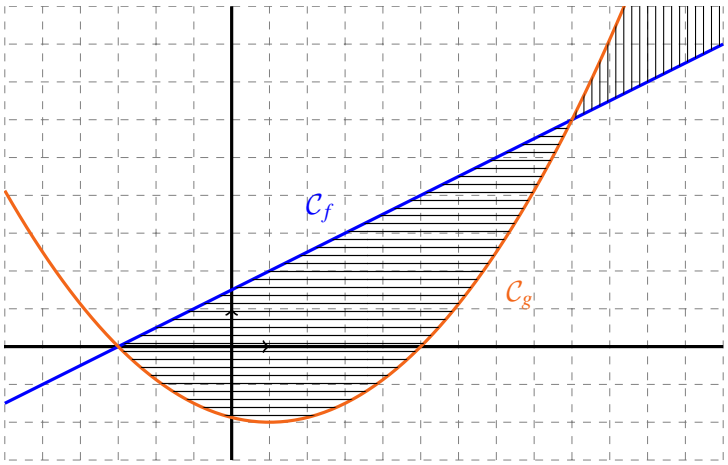
Étudier les positions relatives des courbes des fonctions $f : x \mapsto x$, $g : x \mapsto x^2$ et $h : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

▶ Exercice 3 – Voir le corrigé

Étudier la position relatives des courbes des fonctions $x \mapsto \dfrac{x}{x+2}$ et $x \mapsto \dfrac{x+3}{x-1}$.

▶ Exercice 4 – Voir le corrigé

On a représenté ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g, définies sur $\mathbb{R}$. on admet que g est une fonction polynômiale de degré 2, dont les racines sont -3 et 5 et telle que $g(1) = -2$.



1. Retrouver les expressions de $f(x)$ et $g(x)$ pour tout réel x. La fonction g est-elle paire ? impaire ?
2. Exprimer, en terme ensembliste, chacune des régions hachurées sur ce graphique.

▶ Exercice 5 – Voir le corrigé

Exprimer chacune des fonctions suivantes comme la composition de deux fonctions « usuelles ».

$f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{1+x^2}$ $\qquad$ $f_2 : x \mapsto (3x+8)^7$ $\qquad$ $f_3 : x \mapsto \sqrt{1+\mathrm{e}^x}$

▶ Exercice 6 – Voir le corrigé

On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto \sqrt{x}$ et $h : x \mapsto x-2$. Déterminer l'ensemble de définition et l'expression des fonctions suivantes.

$f \circ f$, $\qquad$ $f \circ g$, $\qquad$ $f \circ h$, $\qquad$ $g \circ f$, $\qquad$ $g \circ h$, $\qquad$ $h \circ f$, $\qquad$ $h \circ h$.

► Exercice 7 – Voir le corrigé

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Donner, à l'aide de quantificateurs, la négations des propositions suivantes.

- f est majorée ;
- f est paire ;
- f est croissante.

► Exercice 8 – Voir le corrigé

Étudier la parité des fonctions suivantes.

$f : x \mapsto \dfrac{x}{x^4+1}$ $\quad g : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2+1}$ $\quad h : x \mapsto \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$i : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$ $\quad j : x \mapsto x^2\ln(x)$ $\quad k : x \mapsto x^3+\dfrac{1}{x}$.

► Exercice 9 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x^2+2x+3}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Soit m un réel. Sans procéder à une étude de fonction, déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation $f(x) = m$ admet au moins une solution.
3. En déduire que la fonction f admet un minimum et un maximum. Préciser en quelle(s) valeur(s) ces extremums sont atteints.

► Exercice 10 – Voir le corrigé

On considère les fonctions $f : x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ et $g : x \mapsto \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

1. Montrer que pour tout réel x, on a $\sqrt{x^2+1}+x > 0$. En déduire le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité de f et g.
3. Montrer que pour tout réel x, $(g \circ f)(x) = x$ et $(f \circ g)(x) = x$.

► Exercice 11 – Voir le corrigé

Déterminer l'ensemble des fonctions à la fois paires et impaires.

► Exercice 12 – Voir le corrigé

1. Montrer que la somme de deux fonctions croissantes est croissante.
2. Montrer, en raisonnant par disjonction de cas, que si une fonction f est monotone sur I et à valeurs dans I, alors $f \circ f$ est croissante.

► Exercice 13 – Voir le corrigé

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

En raisonnant par analyse-synthèse, montrer qu'il existe deux uniques fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ telles que g est paire, h est impaire et $f = g+h$.

Fonction dérivée et étude de fonctions

► Exercice 14 – Voir le corrigé

Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée.

$f_1 : x \mapsto (3x+2)^2$ $\quad$ $f_2 : x \mapsto (6x^2+3x+4)^3$ $\quad$ $f_3 : x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

$f_4 : x \mapsto \sqrt{2x^2-5x-7}$ $\quad$ $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{(3x+6)^2}$ $\quad$ $f_6 : x \mapsto \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}$

$f_7 : x \mapsto \ln(1+x^2)$ $\quad$ $f_8 : x \mapsto x^x$ $\quad$ $f_9 : x \mapsto \sqrt{x}\mathrm{e}^x$

► Exercice 15 – Voir le corrigé

Pour chacune des fonction suivantes, donner leur domaine de définition puis construire leur tableau de variations sur ce domaine de définition. Tracer également l'allure des courbes représentatives de g et h dans un repère.

$f : x \mapsto x^3+3x^2-45x+21$ $\quad$ $g : x \mapsto \dfrac{10x+4}{5x^2+1}$ $\quad$ $h : x \mapsto (2x+1)\sqrt{2x+4}$

► Exercice 16 – Voir le corrigé

Montrer, à l'aide d'un étude de fonction, que : $\forall x > 0,\ \sqrt{x} \leqslant \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$.

► Exercice 17 – Voir le corrigé

On considère la fonction f, définie pour tout réel $x \neq 1$ par $f(x) = \dfrac{x^3+4}{x-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

On considère par ailleurs la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = 2x^3-3x^2-4$.

1. (a) Construire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer $g(2)$ et en déduire le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur chaque intervalle de son domaine de définition et calculer sa dérivée f'.
3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
4. (a) Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, notée $\mathcal{T}_0$.
   (b) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}_0$.
5. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}_0$ dans un repère du plan judicieusement choisi.

Logarithme, exponentielle, puissances

► Exercice 18 – Voir le corrigé

Résoudre les équations suivantes en précisant leur domaine de résolution.

a. $2\ln(x)+1 = 3$ $\quad$ **b.** $\ln(3x-4) = 0$ $\quad$ **c.** $\mathrm{e}^{3x+2} = 4$

d. $2+3\ln(3x-2) = -1$ $\quad$ **e.** $\ln(\mathrm{e}^{3x+4}) = 5$ $\quad$ **f.** $\mathrm{e}^{2x-3} = 3-\pi$

g. $(\mathrm{e}^{2x+1}-3)(\mathrm{e}^x+5) = 0$ $\quad$ **h.** $(\ln(x))^2-\ln(x) = 0$ $\quad$ **i.** $(\mathrm{e}^x-1)\ln(x-\mathrm{e}) = 0$

► Exercice 19 – Voir le corrigé

En utilisant un changement de variable, résoudre l'équation $\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x-10 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

► Exercice 20 – Voir le corrigé

Résoudre les inéquations suivantes. On précisera bien les domaines de résolution.

a. $\ln(5x-3) \geqslant 0$ **b.** $\ln(9x-2) < 0$ **c.** $\ln(3x+1) \geqslant \ln(3-x)$

► Exercice 21 – Voir le corrigé

Montrer, à l'aide d'une étude de fonctions, que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1+x$.

► Exercice 22 – Voir le corrigé

Pour chacune des fonction suivantes, donner leur domaine de définition puis construire leur tableau de variations sur ce domaine de définition. Représenter alors l'allure de la courbe représentative de ces fonctions.

$f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$ $g : x \mapsto \ln(\ln(x))$ $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$

$i : x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$ $j : x \mapsto x^x$ $k : x \mapsto x^{1/x}$

► Exercice 23 – Voir le corrigé

Soit f et g les fonctions définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x\ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x) - x + 1.$$

1. Construire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

► Exercice 24 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathcal{D}_f$.

On considère désormais la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+x+1}}$. Pour tout réel x, on a donc $g(x) = f(x^2+x+1)$.

3. Construire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

Valeur absolue et partie entière

► Exercice 25 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto |x| + |2x-6|$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Pour tout réel x, exprimer $f(x)$ sans valeur absolue.
2. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Tracer l'allure de la courbe de f dans un repère bien choisi.

► Exercice 26 – Voir le corrigé

On considère les fonctions $f : x \mapsto \lfloor |x| \rfloor$ et $g : x \mapsto |\lfloor x \rfloor|$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ et $g\left(-\frac{3}{2}\right)$.
2. Étudier la parité de f et g.
3. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $f(x) = g(x)$.
4. Montrer que pour tout entier négatif n, on a $f(n) = g(n)$.
5. Montrer que pour tout réel $x < 0$ non entier, on a $f(x) = g(x) - 1$.
6. Tracer l'allure des courbes représentatives de f et g.

Corrections

▶ Correction 1 – Voir l'énoncé

On note $\mathcal{D}_f$, $\mathcal{D}_g$ et $\mathcal{D}_h$ les domaines de définition respectifs de f, g et h. Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \ln(x) - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \mathrm{e}$. Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\mathrm{e}\}$. On a $x \in \mathcal{D}_g \Leftrightarrow 2x+1 \geqslant 0$ et $x^2+5x+6 \neq 0$.

Or, $2x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1/2$. Par ailleurs, le discriminant du polynôme x^2+5x+6 vaut $5^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$.

L'équation $x^2+5x+6=0$ admet donc deux solutions qui sont $x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{1}}{2 \times 1} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{1}}{2 \times 1} = -2$.

Ces deux solutions sont inférieures à $-1/2$. On a donc $\mathcal{D}_g = \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$. On a $x \in \mathcal{D}_h \Leftrightarrow 4-x \neq 0$ et $\dfrac{2x+1}{4-x} \geqslant 0$.

Construisons alors le tableau de signes de $\dfrac{2x+1}{4-x}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2x+1}{4-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Ainsi, $\mathcal{D}_g = \left[-\dfrac{1}{2}; 4\right[$.

```python
import numpy as np

def f(x):
    return 1/(np.log(x)-1)

def g(x):
    return np.sqrt(2x+1)/(x**2+5*x+6)

def h(x):
    return np.sqrt((2*x+1)/(4-x))
```

▶ Correction 2 – Voir l'énoncé

Soit x un réel positif. On a $f(x) - g(x) = x - x^2 = x(1-x)$.

Puisque x est positif, $f(x) - g(x)$ est du signe de $1-x$, c'est-à-dire positif sur $[0;1]$ et négatif sur $[1;+\infty[$. La courbe de f est donc au-dessus de celle de g sur $[0;1]$ puis en-dessous sur $[1;+\infty[$.

Par ailleurs, $f(x) - h(x) = x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$. Or, puisque $\sqrt{x}$ est positif, $f(x) - h(x)$ est du signe de $\sqrt{x}-1$, c'est-à-dire négatif sur $[0;1]$ puis positif sur $[1;+\infty[$. La courbe de f est donc en-dessous de celle de h sur $[0;1]$ puis au-dessus sur $[1;+\infty[$.

► Correction 3 – Voir l'énoncé

Notons d'abord que ces deux fonctions sont conjointement définies sur $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$. Soit donc $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$. On a

$$f(x)-g(x)=\frac{x}{x+2}-\frac{x+3}{x-1}=\frac{x(x-1)-(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-1)}=\frac{x^2-x-(x^2+2x+3x+6)}{(x+2)(x-1)}=\frac{-6x-6}{(x+2)(x-1)}.$$

Construisons donc le tableau de signe de cette quantité.

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$-6x-6$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Conclusion : La courbe de f est au-dessus de celle de g sur $]-\infty;-2[$ et $[-1;1[$.
La courbe de f est en-dessous de celle de g sur $]-2;-1[$ et $]1;+\infty[$.
Les courbes de f et g présentent un point d'intersection au point d'abscisse -1.

► Correction 4 – Voir l'énoncé

La fonction f est représentée par une droite, elle est donc affine.

On lit graphiquement que pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

La fonction g est polynomiale de degré 2 et ses racines sont -3 et 5.

Ainsi, il existe un réel a tel que, pour tout réel x, $g(x)=a(x+3)(x-5)$.

Or, $g(1)=-2=a(1+3)(1-5)=-16a$. Ainsi $a=\frac{-2}{-16}=\frac{1}{8}$ et pour tout réel x, $g(x)=\frac{1}{8}(x+3)(x-5)$.

La région hachurée horizontalement est $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid -3\leqslant x\leqslant 9, g(x)\leqslant y\leqslant f(x)\}$.

La région hachurée verticalement est $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\geqslant 9, f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}$.

► Correction 5 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $u(x)=\mathrm{e}^x$ et $v(x)=1+x^2$. On a alors $f_1=u\circ v$.

Pour tout réel x, on pose $u(x)=x^7$ et $v(x)=3x+8$. On a alors $f_2=u\circ v$.

Pour tout réel positif x positif, on pose $u(x)=\sqrt{(}x)$. Pour tout réel x, on pose $v(x)=1+\mathrm{e}^x$. On a alors $f_3=u\circ v$.

► Correction 6 – Voir l'énoncé

$f\circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $(f\circ f)(x)=(x^2)^2=x^4$.

g est définie sur $\mathbb{R}_+$ et f est définie sur $\mathbb{R}$, $f\circ g$ est donc définie sur $\mathbb{R}_+$.
Pour tout réel x positif, on a $(f\circ g)(x)=\sqrt{x}^2=x$.

$f\circ h$ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $(f\circ h)(x)=h(x)^2=(x-2)^2$.

Pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$, et donc $f(x) \in \mathcal{D}_g$. Ainsi, $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$.

Soit x un réel. On a $x \in \mathcal{D}_{g\circ h} \Leftrightarrow h(x) \in \mathcal{D}_g \Leftrightarrow x-2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2$.
Ainsi, $g \circ h$ est définie sur $[2;+\infty[$. Pour tout réel $x \geqslant 2$, on a $(g \circ h)(x) = \sqrt{x-2}$.

$h \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $(h \circ f)(x) = x^2 - 2$.

$h \circ h$ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $(h \circ h)(x) = x - 2 - 2 = x - 4$.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

On rappelle les définitions de ces différents termes.

- f est majorée : $\exists M \in \mathbb{R} \,|\, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$.
- f est paire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.
- f est croissante : $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b))$.

On en déduit leurs négations

- f n'est pas majorée : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) > M$.
- f n'est pas paire : $\exists x \in \mathbb{R} \,|\, f(-x) \neq f(x)$.
- f n'est pas croissante : $\exists a, b \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant b$ ET $f(a) > f(b)$.

► Correction 8 – Voir l'énoncé

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, qui est bien symétrique par rapport à 0. Par ailleurs, pour tout réel x,

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^4+1} = -\frac{x}{x^4+1} = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire.

On a $g(1) = 0$ et $g(-1) = -1$. Ainsi, $g(1) \neq g(-1)$: la fonction g n'est pas paire. De plus, $g(-1) \neq -g(1)$. La fonction g n'est pas impaire.

La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$, qui est bien symétrique par rapport à 0. Par ailleurs, pour tout réel x,

$$h(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-(-x)}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} = h(x).$$

La fonction h est donc paire.

La fonction i est définie sur $\mathbb{R}$, qui est bien symétrique par rapport à 0. Par ailleurs, pour tout réel x,

$$i(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} = i(x).$$

La fonction i est donc paire.

La fonction j est définie sur $]0;+\infty[$, qui n'est pas symétrique par rapport à 0. La fonction j n'est ni paire, ni impaire.

La fonction k est définie sur $\mathbb{R}^*$ qui est symétrique par rapport à 0. Par ailleurs, pour tout réel x,

$$k(-x) = (-x)^3 + \frac{1}{-x} = -x^3 - \frac{1}{x} = -\left(x^3 + \frac{1}{x}\right).$$

La fonction k est donc impaire.

► Correction 9 – Voir l'énoncé

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si $x^2+2x+3 \neq 0$. Le polynôme x^2+2x+3 admet pour discriminant $2^2-4\times 3\times 1=-8<0$. L'équation $x^2+2x+3=0$ n'admet donc pas de solution réelle. Ainsi, $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

Soit m un réel. On a

$$\begin{aligned} f(x)=m &\Leftrightarrow \frac{2x+3}{x^2+2x+3}=m \\ &\Leftrightarrow 2x+3=m(x^2+2x+3) \\ &\Leftrightarrow mx^2+2(m-1)x+3(m-1)=0 \end{aligned}$$

L'équivalence de la première a la deuxième ligne provient du fait que pour tout réel x, on a $x^2+2x+3\neq 0$ et que l'on peut donc multiplier les deux membres de l'équation par cette quantité.

Si $m=0$, cette équation devient $-2x-3=0$, qui admet une solution, à savoir $x=-\frac{3}{2}$.

Si $m\neq 0$, il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant Δ vaut

$$\Delta=(2(m-1))^2-4\times m\times 3(m-1)=(m-1)(4(m-1)-12m)=4(m-1)(-2m-1).$$

On peut alors construire le tableau de signe de ce discriminant.

m	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$m-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2m-1$		$+$	0	$-$		$-$	
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, l'équation $f(x)=m$ admet au moins une solution si $m\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

Pour $m=1$, on a $f(x)=m \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$. Ainsi, f admet 1 pour maximum, atteint en 0.

Pour $m=-\frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned} f(x)=m &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2+2\left(-\frac{1}{2}-1\right)x+3\left(-\frac{1}{2}-1\right)=0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{9}{2}=0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x^2+6x+9)=0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x+3)^2=0 \\ &\Leftrightarrow x=-3. \end{aligned}$$

Ainsi, f admet $-\frac{1}{2}$ pour minimum, atteint en -3.

► Correction 10 – Voir l'énoncé

Soit x un réel. On a $x^2+1>x^2\geqslant 0$.

Par stricte croissance de la fonction Racine carrée, sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}$ soit $\sqrt{x^2+1}>|x|$.

Ainsi, $\sqrt{x^2+1}+x>|x|+x$.

- Si $x >\geqslant 0$, on a alors $|x|+x = x+x = 2x$. Ainsi, $\sqrt{x^2+1}+x > 2x > 0$.
- Si $x < 0$, on a $|x|+x = -x+x = 0$. Ainsi, $\sqrt{x^2+1}+x > 0$.

On a montré par disjonction de cas que, pour tout réel x, on a $\sqrt{x^2+1}+x > 0$.

Pour tout réel x,

$$g \circ f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})} - \mathrm{e}^{-\ln(x+\sqrt{x^2+1})}}{2} = \frac{x+\sqrt{x^2+1} - \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{2}.$$

Ainsi

$$g \circ f(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2 - 1}{2(x+\sqrt{x^2+1})} = \frac{x^2+2x\sqrt{x^2+1}+x^2+1-1}{2(x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x(x+\sqrt{x^2+1})}{2(x+\sqrt{x^2+1})} = x.$$

Par ailleurs, pour tout réel x,

$$f \circ g(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 + 1}\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} + 1}\right).$$

Or,

$$\frac{\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} + 1 = \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} = \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2.$$

Ainsi,

$$f \circ g(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2}\right).$$

Or, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ et donc $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$. Ainsi,

$$f \circ g(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} + \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) \ln\left(\frac{2\mathrm{e}^x}{2}\right) = x.$$

► Correction 11 – Voir l'énoncé

Soit f une fonction à la fois paire et impaire. Notons $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition. Soit $x \in \mathcal{D}_f$.

Puisque f est paire, on a $f(-x) = f(x)$. Or, puisque f est impaire, on a aussi $f(-x) = -f(x)$. Ainsi, $f(x) = -f(x)$ et donc $f(x) = 0$.

Réciproquement, on voit facilement que la fonction nulle convient.

L'unique fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

Soit f et g deux fonctions croissantes sur un intervalle I, soit a et b deux réels de cet intervalle. Supposons que $a \leqslant b$.

- Puisque f est croissante, alors $f(a) \leqslant f(b)$;
- Puisque g est croissante, alors $g(a) \leqslant g(b)$;

En ajoutant ces deux inégalités, on obtient $f(a)+g(a) \leqslant f(b)+g(b)$. La fonction $f+g$ est donc croissante.

Soit f une fonction monotone sur I. Soit a et b deux réels de l'intervalle I. Supposons que $a \leqslant b$.

- Si f est croissante, on a alors $f(a) \leqslant f(b)$ puis $f(f(a)) \leqslant f(f(b))$.
- Si f est décroissante, on a alors $f(a) \geqslant f(b)$ puis $f(f(a)) \leqslant f(f(b))$.

Dans tous les cas, on a $f(f(a)) \leqslant f(f(b))$. La fonction $f \circ f$ est donc croissante sur I.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

Analyse : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ telles que g est paire, h est impaire et $f = g+h$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors $f(x) = g(x)+h(x)$.

Par ailleurs, puisque g est paire, on a $g(-x) = g(x)$. De même, puisque h est impaire, on a $h(-x) = -h(x)$. Ainsi, $f(-x) = g(-x)+h(-x) = g(x)-h(x)$.

On a donc $f(x) = g(x)+h(x)$ et $f(-x) = g(x)-h(x)$.

- En additionnant ces deux égalités, on obtient $f(x)+f(-x) = 2g(x)$ et donc $g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$;
- En soustrayant ces deux égalités, on obtient $f(x)-f(-x) = 2h(x)$ et donc $h(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Synthèse : Pour tout réel x, on pose $g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

- La fonction g est paire. En effet, celle-ci est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = g(x).$$

- La fonction h est impaire. En effet, celle-ci est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$h(-x) = \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -h(x).$$

- Pour tout réel x,

$$g(x)+h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

L'expression de g et h étant unique, on a démontré le résultat voulu.

► Correction 14 – Voir l'énoncé

a. f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f_1'(x) = 3 \times 2(3x+2) = 18x+12$.

b. f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f_2'(x) = (12x+3) \times 3(6x^2+3x+4)^2 = (36x+9)(6x^2+3x+4)^2$.

c. La fonction racine carrée est définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$. L'exponentielle est quant à elle définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f_3 est donc définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, $f_3'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

d. Pour tout réel x, on pose $u(x) = 2x^2-5x-7$. Il s'agit d'un polynôme du second degré dont les racines sont -1 et $\frac{7}{2}$. (utiliser le discriminant si nécessaire). On peut alors construire le tableau de signes de u.

x	$-\infty$		-1		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$u(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a alors $f_4 = \sqrt{u}$. Or, la fonction Racine carrée est définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$.

La fonction f_4 est donc définie sur $\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) \geqslant 0\}$, c'est-à-dire $]-\infty;-1] \cup \left[\frac{7}{2};+\infty\right[$.

La fonction f_4 est dérivable sur $\{x \in \mathbb{R} \,|\, u(x) > 0\}$, c'est-à-dire $]-\infty;-1[\cup\left]\frac{7}{2};+\infty\right[$.

Pour tout réel $x \in]-\infty;-1[\cup\left]\frac{7}{2};+\infty\right[$, $f_4'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \dfrac{4x-5}{2\sqrt{2x^2-5x-7}}$.

e. La fonction f_5 est définie et dérivable sur $]-\infty;-2[$ et $]-2;+\infty[$.

Pour tout réel $x >\neq -2$, $f_5'(x) = 3 \times \left(-\dfrac{2}{(3x+6)^3}\right) = -\dfrac{6}{(3x+6)^3}$.

f. La fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur ces intervalles. La fonction exponentielle étant quant à elle définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f_6 est donc définie et dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

Pour tout réel $x \neq 0$, $f_6'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}$.

g. La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, $1 + x^2 > 0$. La fonction ln étant définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, on en déduit que f_7 l'est également.

Pour tout réel x, $f_7'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

h. Réécrivons f_8 : on a $f_8 : x \mapsto \mathrm{e}^{x\ln(x)}$. La fonction $u : x \mapsto x\ln(x)$ est définie sur $]0;+\infty[$ et est dérivable sur cet intervalle comme produit de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel $x > 0$, $u'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

Or, $f_8 = \mathrm{e}^u$. La fonction exponentielle étant définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, f_8 est donc définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. De plus, $f_8' = u'\mathrm{e}^u$. Ainsi, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = (1+\ln(x))\mathrm{e}^{x\ln(x)} = (1+\ln(x))x^x$.

i. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction f_9 est définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, on a

$$f_9'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^x + \sqrt{x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{(2x+1)\mathrm{e}^x}{2\sqrt{x}}.$$

► Correction 15 – Voir l'énoncé

Fonction f : La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a $f'(x) = 3x^2 + 6x - 45$.

Notons Δ le discriminant du polynôme $3x^2 + 6x - 45$. On a $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-45) = 576 > 0$.

Le polynôme $3x^2 + 6x - 45$ admet donc deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-6-\sqrt{576}}{2\times 3} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6+\sqrt{576}}{2\times 3} = 3.$$

Par ailleurs, le signe d'un polynôme est celui de son coefficient dominant (ici, 3) à l'extérieur des racines. Il est du signe opposé entre les racines. On peut alors dresser le tableau de signe de f' et en déduire le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	196	$\searrow$	-60	$\nearrow$	

Fonction g : Pour tout réel x, on pose $u(x) = 10x+4$ et $v(x) = 5x^2+1$

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $u'(x) = 10$
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $v'(x) = 10x$

Ainsi, puisque $g = \dfrac{u}{v}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. Pour tout réel x, on a donc

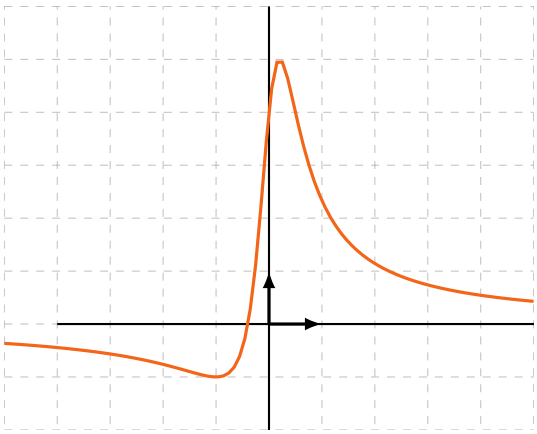
$$g'(x) = \frac{10\times(5x^2+1)-(10x+4)\times 10x}{(5x^2+1)^2} = \frac{-50x^2-40x+10}{(5x^2+1)^2}$$

Pour tout réel x, $(5x^2+1)^2 > 0$. Il ne reste qu'à étudier le signe de $-50x^2-40x+10$. C'est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $(-40)^2-4\times 10\times(-50) = 3600 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles distinctes qui sont

$$x_1 = \frac{-(-40)+\sqrt{3600}}{2\times(-50)} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-40)-\sqrt{3600}}{2\times(-50)} = \frac{1}{5} = 0.2$$

On peut alors construire le tableau de signes de g' et en déduire le tableau de variations de g.

x	$-\infty$		-1		0.2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g		$\searrow$	-1	$\nearrow$	5	$\searrow$	



Fonction h : On considère la fonction $h : x \mapsto (2x+1)\sqrt{2x+4}$.

Soit x un réel. On a : $2x+4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -2$. h est définie sur $[-2;+\infty[$ et dérivable sur $]-2;+\infty[$.

Pour tout réel $x > -2$, on pose $u(x) = \sqrt{2x+4}$ et $v(x) = 2x+1$.

1. u est dérivable sur $]-2;+\infty[$ et pour tout réel $x>-2$, on a $u'(x)=2\times\dfrac{1}{2\sqrt{2x+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}$;
2. v est dérivable sur $]-2;+\infty[$ et pour tout réel $x>-2$, on a $v'(x)=2$.

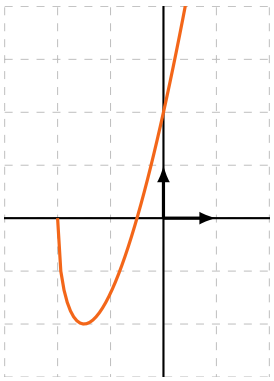
Ainsi, $h=uv$ est dérivable sur $]-2;+\infty[$ et $h'=u'v+uv'$. Pour tout réel $x>-2$, on a donc

$$h'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+4}}\times(2x+1)+\sqrt{2x+4}\times 2=\frac{2x+1+2\sqrt{2x+4}\times\sqrt{2x+4}}{\sqrt{2x+4}}=\frac{2x+1+2(2x+4)}{\sqrt{2x+4}}=\frac{6x+9}{\sqrt{2x+4}}$$

Pour tout réel $x>-2$, on a $\sqrt{2x+4}>0$. $h'(x)$ est donc du signe de $6x+9$. Or, $6x+9\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant -\dfrac{3}{2}$.

On a de plus $h\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-2$.

x	2		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
h	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	



► Correction 16 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x>0$, on pose $f(x)=\sqrt{x}-\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$.

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}=\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Or, pour tout réel $x>0$, on a $2\sqrt{x}>0$. $f'(x)$ est donc du signe de $1-\sqrt{x}$.

Or, si $x>0$, alors $1-\sqrt{x}\geqslant 0\Leftrightarrow 1\geqslant\sqrt{x}\Leftrightarrow 1\geqslant x$. La dernière équivalence est obtenue par croissance de la fonction $x\mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Ainsi, pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire $\sqrt{x} - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) \leqslant 0$ et donc $\sqrt{x} \leqslant \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$. On a par ailleurs $g(0) = -4$, $g(1) = -5$ et $g(2) = 0$.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$6x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
g		↗	-4	↘	-5	↗	0	↗	

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Les fonctions $x \mapsto x^3 + 4$ et $x \mapsto x - 1$ sont dérivables sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$. De plus, la fonction $x\, mapsto x - 1$ ne s'annule pas sur ces intervalles. Ainsi, la fonction f est dérivable par quotient sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$..

Pour tout réel $x \neq 1$, on a

$$f'(x) = \frac{3x^2 \times (x-1) - (x^3+4) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2}.$$

Ainsi, pour tout réel $x \neq 1$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. Or, on lit sur le tableau de variations de g que, pour tout réel $x \leqslant 2$, on a $g(x) \leqslant 0$ et pour $x \geqslant 2$, on a $g(x) \geqslant 0$. On en déduit les variations de f sur son domaine de définition.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		↘	‖	↘	12	↗	

La tangente $\mathcal{T}_0$ a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ c'est-à-dire $y = -4x - 4$.

Pour tout réel $x \neq 1$, on a

$$f(x) - (-4x-4) = \frac{x^3+4}{x-1} - (-4x-4) = \frac{x^3 + 4 - (x-1)(-4x-4)}{x-1} = \frac{x^3+4x^2}{x-1} = \frac{x^2(x+4)}{x-1}.$$

On construit alors le tableau de signes de cette quantité.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-(-4x-4)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{T}_0$ sur $]-\infty;4[$ et $]1;+\infty[$. $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{T}_0$ sur $]-4;1[$.

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}_0$ présentent un point d'intersection à l'abscisse -4.

► Correction 18 – Voir l'énoncé

a. Soit $x>0$, $2\ln(x)+1=3 \Leftrightarrow 2\ln(x)=2 \Leftrightarrow \ln(x)=1 \Leftarrow x=\mathrm{e}$. $S=\{\mathrm{e}\}$.

b. Soit $x>\dfrac{4}{3}$, $\ln(3x-4)=0 \Leftrightarrow 3x-4=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3}$. $S=\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$.

c. Soit $x\in\mathbb{R}$. $\mathrm{e}^{3x+2}=4 \Leftrightarrow 3x+2=\ln(4) \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln(4)-2}{3}$. $S=\left\{\dfrac{\ln(4)-2}{3}\right\}$.

d. Soit $x>\dfrac{2}{3}$. $2+3\ln(3x-2)=-1 \Leftrightarrow \ln(3x-2)=-1 \Leftrightarrow 3x-2=\mathrm{e}^{-1} \Leftrightarrow x=\dfrac{\mathrm{e}^{-1}+2}{3}$. $S=\left\{\dfrac{\mathrm{e}^{-1}+2}{3}\right\}$.

e. Soit $x\in\mathbb{R}$. $\ln(\mathrm{e}^{3x+4})=5 \Leftrightarrow 3x+4=5 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$. $S=\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

f. Puisque $3-\pi<0$, l'équation $\mathrm{e}^{2x-3}=3-\pi$ ne possède pas de solution réelle.

g. Soit $x\in\mathbb{R}$. $(\mathrm{e}^{2x+1}-3)(\mathrm{e}^x+5)=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x+1}-3=0$ ou $\mathrm{e}^x+5=0$.

- $\mathrm{e}^{2x+1}-3=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x+1}=3 \Leftrightarrow 2x+1=\ln(3) \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln(3)-1}{2}$.
- $\mathrm{e}^x+5=0$ est impossible puisque $e^x>0$.

Ainsi, $S=\left\{\dfrac{\ln(3)-1}{2}\right\}$.

h. Soit $x>0$. $(\ln(x))^2-\ln(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)(\ln(x)-1)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=0$ ou $\ln(x)=1 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=\mathrm{e}$. $S=\{1,\mathrm{e}\}$.

i. Soit $x>\mathrm{e}$,$(\mathrm{e}^x-1)\ln(x-\mathrm{e})=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x-1=0$ ou $\ln(x-\mathrm{e})=0$. Or,

- $\mathrm{e}^x-1=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x=1 \Leftrightarrow x=0$. 0 n'est cependant pas une solution car il n'est pas dans l'ensemble de résolution.
- $\ln(x-\mathrm{e})=0 \Leftrightarrow x-\mathrm{e}=1 \Leftrightarrow x=1+\mathrm{e}$.

L'unique solution de cette équation est donc $1+\mathrm{e}$.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $X=\mathrm{e}^x$. Ainsi,

$$\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x-10=0 \Leftrightarrow X^2+3X-0=0.$$

Cette deuxième équation est une équation du second degré. Le discriminant du polynôme $X^2+3X-10$ vaut 49 qui est strictement positif. Ce polynôme a donc deux racines qui sont 2 et -5.

On a donc $X=2$ ou $X=-5$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^x=2$ (et donc $x=\ln(2)$) ou $\mathrm{e}^x=-5$ ce qui est impossible.

L'unique solution de l'équation est donc $\ln(2)$.

► Correction 20 – Voir l'énoncé

a. $\ln(5x-3)$ existe si et seulement si $5x-3>0$, c'est-à-dire $x>\dfrac{5}{3}$. Soit donc $x>\dfrac{5}{3}$. Alors, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\ln(5x-3)\geqslant 0$ si et seulement si $5x-3\geqslant 1$ soit $x\geqslant\dfrac{4}{5}$. $S=\left[\dfrac{4}{5}+\infty\right[$.

b. $\ln(9x-2)$ existe si et seulement si $9x-2>0$, c'est-à-dire $x>\dfrac{2}{9}$. Soit donc $x>\dfrac{2}{9}$. Alors par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\ln(9x-2)<0$ si et seulement si $9x-2<1$ soit $x<\dfrac{1}{3}$. Ainsi, $S=\left]\dfrac{2}{9};\dfrac{1}{3}\right[$.

c. $\ln(3x+1)$ existe si et seulement si $3x+1>0$, c'est-à-dire $x>-\dfrac{1}{3}$. Par ailleurs, $\ln(3-x)$ existe si et seulement si $3-x>0$, c'est-à-dire $x<3$. Les deux expressions existent toutes deux lorsque $-\dfrac{1}{3}<x<3$. Soit donc $x\in\left]-\dfrac{1}{3};3\right[$. Alors, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\ln(3x+1)\geqslant\ln(3-x)$ si et seulement si $3x+1\geqslant 3-x$ soit $x\geqslant\dfrac{1}{2}$. Finalement, $S=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[\cap\left]-\dfrac{1}{3};3\right[$ soit $S=\left[\dfrac{1}{2};3\right[$.

► Correction 21 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$. On sait par ailleurs que $e^x\geqslant 1\Leftrightarrow x\geqslant 0$. On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	0	↗	

On a en effet $f(0)=\mathrm{e}^0-0-1=0$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x)\geqslant 0$, soit $\mathrm{e}^x-x-1\geqslant 0$ ou $\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$.

Graphiquement, cela signifie que la courbe de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de sa tangente en 0.

► Correction 22 – Voir l'énoncé

Fonction f : Pour tout réel $x\neq -1$, on pose $u(x)=\mathrm{e}^x$ et $v(x)=1+x$.

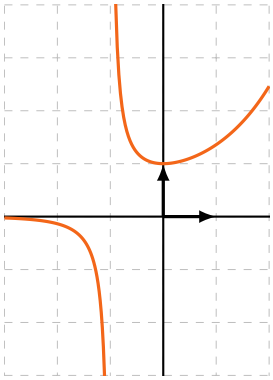
- u est dérivable sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$, et pour tout réel $x\neq -1$, $u'(x)=\mathrm{e}^x$.
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$, et pour tout réel $x\neq -1$, $v'(x)=1$.

Ainsi, puisque $f=\dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$ et $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. Pour tout réel $x\neq -1$,

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x\times(1+x)-\mathrm{e}^x\times 1}{(1+x)^2}=\frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}$$

Pour tout réel $x\neq -1$, $(1+x)^2>0$ et $\mathrm{e}^x>0$. $f'(x)$ est donc du signe de x (hormis en -1, valeur interdite).

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		↘	‖	↘	1	↗	



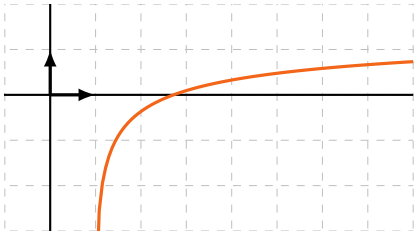
Fonction g : La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit x un réel strictement positif. On a

$$x \in \mathcal{D}_g \Leftrightarrow \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

La fonction g est définie sur $]1;+\infty[$. Elle est aussi dérivable par composition sur cet intervalle.

Pour tout réel $x > 1$, on a alors $f'(x) = \dfrac{1/x}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

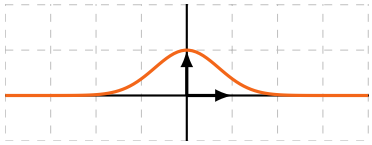
Ainsi, pour tout réel $x > 1$, on a $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]1;+\infty[$.



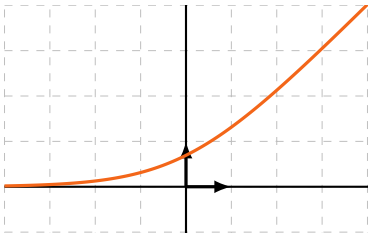
Fonction h : Les fonctions $x \mapsto -x^2$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction h est aussi définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a $h'(x) - 2x\mathrm{e}^{-x^2}$. Or, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, $h'(x)$ est donc du signe de $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h		↗	1	↘	



Fonction i : La fonction $x \mapsto 1 + \mathrm{e}^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel , on a $1 + \mathrm{e}^x > 0$. La fonction ln est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. Ainsi, la fonction i est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a $i'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} > 0$. La fonction i est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Fonction j : Réécrivons j : on a $j : x \mapsto \mathrm{e}^{x\ln(x)}$. La fonction $u : x \mapsto x\ln(x)$ est définie sur $]0;+\infty[$ et est dérivable sur cet intervalle comme produit de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel $x > 0$, $u'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

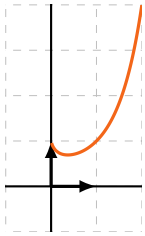
Or, $j = \mathrm{e}^u$. La fonction exponentielle étant définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, j est donc définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. De plus, $j' = u'\mathrm{e}^u$. Ainsi, pour tout réel $x > 0$, $j'(x) = (1+\ln(x))\mathrm{e}^{x\ln(x)} = (1+\ln(x))x^x$.

Or, pour tout $x > 0$, on a $x^x > 0$. $j'(x)$ est donc du signe de $1+\ln(x)$. Soit donc $x > 0$. On a

$$1+\ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant -1 \Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}^{-1}$$

La dernière équivalence est obtenue par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. On en déduit le tableau de signe de j' et le tableau de variations de j.

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$j'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
j	‖	↘	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}$	↗	



Fonction k : Réécrivons k : on a $k : x \mapsto \mathrm{e}^{\ln(x)/x}$. La fonction $u : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est définie sur $]0;+\infty[$ et est dérivable sur cet intervalle comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout réel $x > 0$,

$$u'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

Or, $k = \mathrm{e}^u$. La fonction exponentielle étant définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, k est donc définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. De plus, $k' = u'\mathrm{e}^u$. Ainsi, pour tout réel $x > 0$,

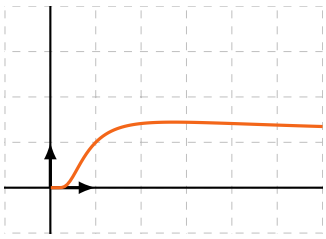
$$k'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}\mathrm{e}^{\ln(x)/x} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}x^{1/x}.$$

Or, pour tout $x > 0$, on a $x^{1/x} > 0$ et $x^2 > 0$. $k'(x)$ est donc du signe de $1-\ln(x)$. Soit donc $x > 0$. On a

$$1-\ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -\ln(x) \geqslant -1 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant \mathrm{e}.$$

La dernière équivalence est obtenue par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. On en déduit le tableau de signe de k' et le tableau de variations de k.

x	0		e		$+\infty$
$k'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
k	‖	↗	$\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$	↘	



► Correction 23 – Voir l'énoncé

La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout réel $x > 0$, on a $g'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$. Ainsi, soit $x > 0$, on a :

$$g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant 1.$$

On en déduit le tableau de signe de g' et le tableau de variations de g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖	↗	0	↘	

On remarque en particulier que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \leqslant 0$.

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, comme produit puis somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout réel $x > 0$, on a

$$f'(x) = -x + 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = -x + \ln(x) + 1 = g(x).$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$-$	
f	‖	↘		↘	

► Correction 24 – Voir l'énoncé

1. La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$.
2. Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ ne s'annule pas sur cet intervalle. Ainsi, f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times \sqrt{x} - \mathrm{e}^x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} = \frac{1}{x} \times \frac{\mathrm{e}^x\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} - \mathrm{e}^x}{2\sqrt{x}} = \frac{(2x-1)\mathrm{e}^x}{2x\sqrt{x}}.$$

Pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $(2x-1)$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	$\sqrt{2\mathrm{e}}$	↗	

3. La fonction $u : x \mapsto x^2 + x + 1$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout réel x, $x^2 + x + 1 > 0$ (on calcule le discriminant du polynôme $x^2 + x + 1$, celui-ci est strictement négatif). Ainsi, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) = (2x+1) \times \frac{(2(x^2+x+1)-1)e^{x^2+x+1}}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

et donc

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(2x^2+2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x+1}}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$g'(x)$ est du signe de $(2x+1)$ (on vérifie que pour tout réel x, $2x^2+2x+1>0$ à l'aide du discriminant par exemple).

x	0		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	

► Correction 25 – Voir l'énoncé

Soit x un réel.

On a $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$.

Par ailleurs, $|2x-6| = \begin{cases} 2x-6 & \text{si } 2x-6 \geqslant 0 \\ -(2x-6) & \text{sinon} \end{cases}$ c'est-à-dire $|2x-6| = \begin{cases} 2x-6 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -6-2x & \text{sinon.} \end{cases}$.

Ainsi,

- Si $x<0$, on a $f(x) = -x+6-2x = 6-3x$; En particulier, f est décroissante sur $]-infty;0[$.
- Si $0 \leqslant x < 3$, on a $f(x) = x+6-2x = 6-x$; En particulier, f est décroissante sur $[0;3[$.
- Si $x \geqslant 3$, on a $f(x) = x+2x-6 = 3x-6$. En particulier, f est croissante sur $[3;+\infty[$.

► Correction 26 – Voir l'énoncé

On a

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left\lfloor \left|-\frac{3}{2}\right| \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1.$$

et

$$g\left(-\frac{3}{2}\right) = \left| \left\lfloor -\frac{3}{2} \right\rfloor \right| = |-2| = 2.$$

Soit x un réel. On a $|x] = |-x|$. Ainsi, $f(-x) = \lfloor |-x| \rfloor = \lfloor |x| \rfloor = f(x)$. La fonction f est paire.

En revanche, on a $g\left(\frac{3}{2}\right) = \left|\lfloor \frac{3}{2} \rfloor\right| = |1| = 1$. On a donc $g\left(-\frac{3}{2}\right) \neq g\left(\frac{3}{2}\right)$ et $g\left(-\frac{3}{2}\right) \neq -g\left(\frac{3}{2}\right)$. La fonction g n'est ni paire ni impaire.

Soit $x \geqslant 0$. On a alors $f(x) = \lfloor |x| \rfloor = \lfloor x \rfloor$. De plus, par croissance de la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$, on a $\lfloor x \rfloor \geqslant 0$ et donc $g(x) = |\lfloor x \rfloor| = \lfloor x \rfloor = f(x)$.

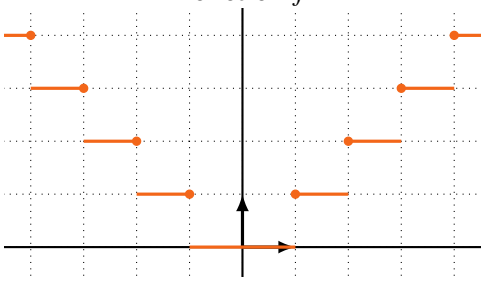
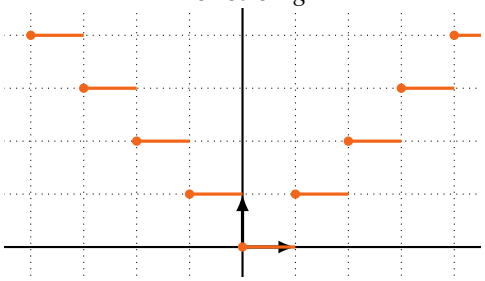
Soit n un entier négatif. Alors $f(n) = \lfloor |n| \rfloor = \lfloor -n \rfloor = -n$ car $-n$ est un entier.
Par ailleurs, $g(n) = |\lfloor n \rfloor| = |n| = -n$. Ainsi, $f(n) = g(n)$

Soit $x < 0$ non entier. On a alors $f(x) = \lfloor |x| \rfloor = \lfloor -x \rfloor$.
Or, puisque x n'est pas un entier, on a $-x - 1 < \lfloor -x \rfloor < -x$.

Par ailleurs, $g(x) = |\lfloor x \rfloor|$. Puisque x n'est pas entier, on a $x - 1 < \lfloor x \rfloor < x$. On applique alors la fonction Valeur absolue qui est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$, et on a donc $|x-1| < |\lfloor x \rfloor| < |x|$ soit $1 - x < g(x) < -x$ et donc $x < -g(x) < x - 1$.

On a donc $-x - 1 < f(x) < -x$ et $1 - x < g(x) < -x$. En additionnant des deux inégalités, on a donc $-2 < f(x) - g(x) < 0$ et donc, puisque $f(x) - g(x)$ est un entier, on a que pour tout réel $x < 0$ non entier, $f(x) - g(x) = -1$ soit $f(x) = g(x) - 1$.

Fonction f



Fonction g