

# Matrices

## 1 Notion de matrices

### ► Exercice 1

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & -3 \\ 2 & 6 & -8 & 0 \\ 7 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

1. Quelle est la dimension de la matrice  $A$  ?
2. Que valent  $a_{1,2}$ ,  $a_{3,3}$  et  $a_{2,4}$  ?

### ► Exercice 2

Ecrire sous la forme d'un tableau de nombres la matrice  $3 \times 3$  dont le coefficient  $(i,j)$  vaut  $i^j$ .

### ► Exercice 3

Ecrire les matrices suivantes sous la forme d'un tableau de nombres

- $A = (i + j)_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}$
- $B = (\max(i,j))_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4}$
- $C = \left( \frac{np}{n+p} \right)_{1 \leq n \leq 3, 1 \leq p \leq 2}$
- $D = (i + 1)_{1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2}$
- $E = (i^{n+p})_{1 \leq n \leq 4, 1 \leq p \leq 4}$  où  $i$  désigne ici un nombre complexe vérifiant  $i^2 = -1$ .

### ► Exercice 4

Soit  $A$  une matrice de dimension  $n \times p$ . On appelle transposée de  $A$ , notée  $A^T$ , la matrice de dimension  $p \times n$  dont le coefficient  $(i,j)$  vaut  $a_{j,i}$ .

Déterminer la transposée de la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

### ► Exercice 5

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$  une matrice carrée de dimension  $n$ . On appelle trace de  $A$  la somme des coefficients diagonaux de la matrice  $A$ . On a donc  $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ . Déterminer la trace des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = (ij)_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} \quad C = I_n \quad D = (i+j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$$

## 2 Opérations sur les matrices

### ► Exercice 6

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A + B$ ,  $3A - 2B$  et  $\frac{2}{3}A + \frac{1}{4}B$ .

### ► Exercice 7

Effectuer les calculs suivants

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 - 2i & i & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 1 + i \\ i - 5 \end{pmatrix}$$

### ► Exercice 8

Déterminer la valeur du réel  $x$  pour que  $\begin{pmatrix} 3x & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ x \\ 3 \end{pmatrix} = (12)$ .

### ► Exercice 9

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = (3 \ -2 \ 1 \ 7)$  et  $D = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

Parmi les produits suivants, déterminer ceux qui ont un sens et déterminer le résultat.

$AB$	$AC$	$BC$	$CA$	$CB$
$AD$	$CD$	$DC$	$BD$	$DB$

### ► Exercice 10

Déterminer les valeurs des réels  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  pour que  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ .

### ► Exercice 11

Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A^2 = 2A$  et en déduire  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

### ► Exercice 12

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = A - I_2$ .

1. Calculer  $B$  puis  $B^2$
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^n = I_2 + nB$

### ► Exercice 13

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ .

► **Exercice 14**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .
2. Conjecturer une expression de  $A^n$  en fonction de  $n$ .
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

► **Exercice 15**Soit  $a, b$  et  $c$  trois réels et

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .
2. Conjecturer une expression de  $A^n$  en fonction de  $n$ .
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

► **Exercice 16**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2$
2. Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $A^2 + \alpha A + \beta I_3 = 0$

► **Exercice 17**Soit  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0$ .► **Exercice 18**Soit  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Pour tous réels  $a$ , et  $b$ , on note  $M(a,b) = aI_2 + bB$ .

1. Calculer  $M(0,1)^2$
2. Soit  $a, b, a'$  et  $b'$  quatre réels. Exprimer les produits  $M(a,b) \times M(a, -b)$  et  $M(a,b) \times M(a',b')$ .
3. Quel ensemble de nombres les différents résultats trouvés ici vous rappellent-ils ?

## 3 Matrices inversibles

► **Exercice 19**

Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2$ .
2. Vérifier que  $A^2 + A = 2I_3$
3. En déduire que  $A$  est inversible et déterminer son inverse.

► **Exercice 20**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .
2. Vérifier que  $A^3 - A^2 - 2A = 4I_3$
3. En déduire que  $A$  est inversible et déterminer son inverse.

► **Exercice 21**

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, déterminer leur inverse.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} i & 2 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

► **Exercice 22**Soit  $n$  un entier naturel,  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de dimension  $n$  et  $C = AB$ .

1. On suppose que la première ligne de  $A$  est uniquement composée de 0. Calculer  $c_{1,1}$ .
2. La matrice  $A$  peut-elle être inversible ?
3. Généraliser : une matrice peut-elle être inversible si une de ses lignes ou colonnes est nulle ?

► **Exercice 23**

Soit  $n$  un entier naturel et  $M$  une matrice de dimension  $n$ . On dit que  $M$  est nilpotente de rang  $p$  si  $M^p = 0_n$  et  $M^{p-1} \neq 0_n$ .

- Soit  $B$  une matrice nilpotente de rang  $p$ 
  - Calculer le produit  $(I_n - B)(I_n + B + B^2 + \dots + B^{p-1})$ .
  - En déduire que  $I_n - B$  est inversible et déterminer son inverse.
- Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A$  est nilpotente puis déterminer l'inverse de  $I_3 - A$ .

► **Exercice 24**

Soit  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

- Calculer  $PQ$ .
- On note  $B = PAQ$ . Calculer  $B$  puis  $B^n$  pour tout entier naturel  $n$ .
- En déduire une expression de  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

► **Exercice 25**

Traduire les systèmes suivants sous forme matricielle

$$\begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 3x + y - z = 5 \\ 5x + 2y + 4z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - z + 3t = 1 \\ y - z + t = 5 \\ 2x + 3y - 4z + 2t = 3 \end{cases}$$

► **Exercice 26**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

- Calculer le produit  $AB$ .
- Traduire sous forme matricielle puis résoudre les système suivants.

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x + 2y - 2z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + z = 1 \\ x + y = 3 \\ y - z = 6 \end{cases}$$

► **Exercice 27**

Soit  $a, b$  et  $c$  trois réels et  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . On souhaite déterminer les valeurs des réels  $a$  tels que  $f(0) = 5$ ,  $f(1) = 2$  et  $f(2) = 6$

- Justifier que ce problème revient à résoudre le système matriciel  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$
- On admet que l'inverse de la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  est de la forme  $\begin{pmatrix} 0,5 & \alpha & 0,5 \\ \beta & 2 & -0,5 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Déterminer les valeurs manquantes

- En déduire les valeurs des réels  $a, b$  et  $c$  solutions du problème.