DM 1 : Récurrence

▶ Exercice 1 — Amérique du Nord 2022

On s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.

1. La température au bout de 2 minutes est données par T_2. Or,
   - $T_1 = 0{,}955T_0 + 0{,}9 = 172{,}8$
   - $T_2 = 0{,}955T_1 + 0{,}9 = 165{,}924$.

   Au bout de deux minutes, la température du gâteau est d'environ 165,9 degrés Celsius.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $P(n)$: $T_n \geqslant 20$.
   - Initialisation : $T_0 = 180$. On a bien $T_0 \geqslant 20$. $P(0)$ est vraie.
   - Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a alors $T_n \geqslant 20$. En multipliant cette inégalité par 0,955 et en ajoutant 0,9, on obtient $0{,}955T_n + 20 \geqslant 0{,}955 \times 20 + 0{,}9$ c'est-à-dire $T_{n+1} \geqslant 20$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Conclusion : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. $P(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n.
3. Soit n un entier naturel
$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= 0{,}955T_n + 0{,}9 - T_n \\ &= -0{,}045T_n + 0{,}9 \\ &= -0{,}045\left(T_n - \frac{0{,}9}{0{,}045}\right) \\ &= -0{,}045(T_n - 20) \end{aligned}$$
4. D'après la question 2, pour tout entier naturel n, $T_n \geqslant 20$ et donc $T_n - 20 \geqslant 0$. Ainsi, $-0{,}045(T_n - 20) \leqslant 0$, ce qui signifie que $T_{n+1} - T_n \leqslant 0$. Finalement, on a bien $T_{n+1} \leqslant T_n$. La suite (T_n) est décroissante.
5. A la sortie du four, la température du gâteau diminue mais reste au-dessus de la température de l'air ambiant. Nous verrons dans un prochain chapitre sur les limites de suite que la température du gâteau se rapproche en effet de 20 degrés Celsius.

▶ Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$

1. On a
   - $u_1 = \dfrac{1}{2 - u_0} = \dfrac{1}{2}$
   - $u_2 = \dfrac{1}{2 - u_1} = \dfrac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$
   - $u_3 = \dfrac{1}{2 - u_2} = \dfrac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{4}$
2. Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ »
   - Initialisation : $u_0 = 0$ et $\dfrac{0}{1+0} = 0$. $P(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a alors $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Alors,
$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

     $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Conclusion : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.