# DM2 : Récurrence, dérivation

### ► Exercice 1 — Nouvelle-Calédonie – 29 Août 2023

On considère la suite $(u_n)$ telle que $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = -\frac{u_n - 4}{u_n + 3}$$

On admet que $u_n$ est défini pour tout entier naturel $n$.

1. Calculer les valeurs exactes de $u_1$ et $u_2$.
2. On considère la fonction **terme** ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python

```python
def terme(n) :
  u = ...
  for i in range(n) :
    u = ...
  return u
```

   Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel $n$, l'instruction terme($n$) renvoie la valeur de $u_n$.
3. Soit $f$ la fonction définie sur $]-3;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{-x-4}{x+3}$$

   Ainsi, pour tout entier naturel $n$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Démontrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur $]-3;+\infty[$.
4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, on a $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$.
5. Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$.
   (a) Donner $v_0$
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = 1 + v_n$.
   (c) En déduire une expression de $v_n$ en fonction de $n$ pour tout entier naturel $n$
   (d) En déduire que pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = \frac{1}{n+0.5} - 2$$

### ► Exercice 2

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$.

1. Vérifier que $u_1 = 12$ puis calculer $u_2$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant n + 1$.
3. Pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = u_n - n - 1$. Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
4. En déduire une expression de $u_n$ puis de $v_n$ en fonction de $n$.