DM2 : Récurrence, dérivation

► **Exercice 1 — Nouvelle-Calédonie – 29 Août 2023**

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. On a $u_1 = \dfrac{-0-4}{0+3} = -\dfrac{4}{3}$ et $u_2 = \dfrac{-\left(-\frac{4}{3}\right)-4}{-\frac{4}{3}+3} = \dfrac{\frac{4}{3}-\frac{12}{3}}{-\frac{4}{3}-\frac{9}{3}} = \dfrac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{3}} = -\dfrac{8}{5}$
2. On complète la fonction **terme** ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python

```python
def terme(n) :
  u = 0
  for i in range(n) :
    u = (-u-4)/(u+3)
  return u
```

3. Pour tout réel $x > -3$, on pose $u(x) = -x-4$ et $v(x) = x+3$. u et v sont dérivables sur $]-3;+\infty[$ et v ne s'annule pas sur cet intervalle. f est donc dérivable sur $]-3;+\infty[$.
   Par ailleurs, $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Ainsi, pour tout réel $x > -3$, on a

   $$f'(x) = \frac{-1(x+3) - (-x-4) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{-x-3+x+4}{(x+3)^2} = \frac{1}{(x+3)^2} > 0$$

   f est donc strictement croissante sur $]-3;+\infty[$.
4. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$.
   - On a $u_0 = 0$ et $u_1 = -\dfrac{4}{3}$. Ainsi, $-2 < u_1 \leqslant u_0$. $P(0)$ est donc vraie.
   - Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie. On a donc

     $$-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$$

     La fonction f étant strictement croissante sur $]-2;+\infty[$, on a alors

     $$f(-2) < f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$$

     Or, $f(-2) = \dfrac{-(-2)-4}{-2+3} = \dfrac{-2}{1} = -2$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(u_n) = u_{n+1}$.
     Ainsi, on a bien $-2 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$.

   (a) On a $v_0 = \dfrac{1}{u_0+2} = \dfrac{1}{2}$

(b) Pour tout entier naturel n, on a $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$ et donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}+2}$.

Or, $u_{n+1} = \dfrac{-u_n-4}{u_n+3}$. On remplace donc u_{n+1} par cette valeur. Ainsi,

$$v_{n+1} = \frac{1}{\dfrac{-u_n-4}{u_n+3}+2} = \frac{1}{\dfrac{-u_n-4}{u_n+3}+\dfrac{2(u_n+3)}{u_n+3}} = \frac{1}{\dfrac{-u_n-4}{u_n+3}+\dfrac{2u_n+6)}{u_n+3}} = \frac{1}{\dfrac{-u_n-4+2u_n+6}{u_n+3}} = \frac{1}{\dfrac{u_n+2}{u_n+3}} = \frac{u_n+3}{u_n+2}$$

Ainsi,

$$v_{n+1}-v_n = \frac{u_n+3}{u_n+2} - \frac{1}{u_n+2} = \frac{u_n+2}{u_n+2} = 1$$

Finalement, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1 + v_n$. La suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

(c) Pour tout entier naturel n, on a donc $v_n = v_0 = n \times 1$ soit $v_n = \dfrac{1}{2} + n$.

(d) Pour tout entier naturel n, on a $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$.

Ainsi, $\dfrac{1}{v_n} = u_n + 2$ et $u_n = \dfrac{1}{v_n} - 2 = \dfrac{1}{n+0.5} - 2$.

► Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$.

1. On a

$$u_1 = 5u_0 - 4\times 0 - 3 = 5\times 3 - 0 - 3 = 15 - 3 = 12$$

et

$$u_2 = 5u_1 - 4\times 1 - 3 = 5\times 12 - 4 - 3 = 60 - 7 = 53$$

2. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: $u_n \geqslant n+1$.
   - Pour $n = 0$: on a $u_0 = 3$ et $0+1 = 1$. On a bien $u_0 \geqslant 0+1$, $P(0)$ est vraie.
   - Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $u_n \geqslant n+1$. En multipliant par 5, on a $5u_n \geqslant 5(n+1)$ soit $5u_n \geqslant 5n+5$. En ajoutant $-4n-3$ des deux côtés, on a alors $5u_n - 4n - 3 \geqslant 5u_n + 5 - 4n - 3$ soit $u_{n+1} \geqslant n+2$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - n - 1$.
   On a alors $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) - 1$ soit $v_{n+1} = u_{n+1} - n - 2$. Or, $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$.
   Ainsi, $v_{n+1} = 5u_n - 4n - 3 - n - 2 = 5u_n - 5n - 5 = 5(u_n - n - 1) = 5v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 3 - 1 = 2$ Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
4. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times 5^n = 2 \times 5^n$. Par ailleurs, $v_n = u_n - n - 1$ donc $u_n = v_n + n + 1 = 2\times 5^n + n + 1$.